БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

14

Д. Н. АРТЕМЬЕВ

# КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТОК




ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ
14

Д. Н. АРТЕМЬЕВ
ПРОФ. МОСКОВСК. ГОС. УНИВ.

# КРИСТАЛЛОГРАФИЯ



ТОМ ТРЕТИЙ



## СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТОК



1 9 2 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

Лейпциг, Типография Б. Г. Тейбнера.

# V. СИМВОЛЫ ЭЛЕМЕНТОВ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА.

## 1. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ.

Принимая во внимание, что внешняя форма кристалла является определенной функцией его внутреннего строения, мы можем рассматривать его внешний вид, как результат определенных физических (и отчасти химических) процессов, зафиксированных природой в виде кристаллического многогранника, состоящего из твердых частиц. Из возможности такой точки зрения вытекает важность изучения наружной формы кристалла, причем изучение внешнего вида кристаллического многогранника мы можем считать за исследование некоторых определенных физических свойств данного вещества в твердом состоянии, характеризующимся кристаллической однородностью.

Для того, чтобы иметь возможность вполне точно ориентироваться в взаимном расположении элементов кристаллического многогранника, всего удобнее выбрать некоторые из его элементов и придать им определенное положение в пространстве. После этого, взаимное расположение всех других элементов многогранника может быть вполне установлено, если мы будем знать их положение относительно элементов, выбранных нами за исходные. Такими элементами может служить всякая совокупность элементов, вполне определяющих данный кристаллический комплекс.

Для полного определения взаимного расположения частей пространственной фигуры необходимо иметь в качестве данных, по крайней мере, три направления, не лежащих в одной плоскости. Такие направления называются в аналитической геометрии осями координат, и представляют собою три линии,

причем для определения отрезков по всем трем линиям берется какая-нибудь определенная единица длины, одинаковая для всех направлений. Так как каждый кристаллический многогранник представляет собою пространственную фигуру, т. е. фигуру трех измерений, то и для определения взаимного расположения его элементов также необходимо принять три оси. За такие оси принимаются три возможных ребра данного кристаллического комплекса.

Так как каждое возможное ребро комплекса будет определенным рядом гомологических точек пространственной решетки, соответствующей этому комплексу, то всего удобнее принять некоторые три ряда, не лежащие в одной плоской сетке, за постоянные направления, т. е. оси, относительно которых мы и будем определять положение всех элементов данного кристаллического многогранника. Так как каждый такой ряд характеризуется совершенно определенным промежутком, то этот промежуток ряда мы и можем принять за метрическую единицу по направлению, соответствующему данному ряду. В виду того, что ряды различных непараллельных направлений имеют, вообще говоря, разные промежутки, мы заключаем, что метрические единицы по трем осям будут различны. В виду такой особенности этих осей, мы их называем не осями координат, а кристаллографическими осями, принимая во внимание, что такие оси являются всегда возможными ребрами данного кристаллического комплекса.

Определив положение возможных граней и ребер кристаллического комплекса относительно выбранных кристаллографических осей, мы можем, каким-нибудь способом, обозначить это положение, руководствуясь определенными правилами. Такое обозначение положения грани или ребра кристаллического комплекса относительно кристаллографических осей называется символом грани или символом ребра, в зависимости от того, к какому элементу многогранника оно относится. Определенные правила для обозначения элементов кристаллического многогранника и выводящиеся, на основании применения этих правил, символы были в свое время предложены различными авторами. Обозначения граней определенного положения определенными буквами были пред-

ложены Леви и затем Ф. Науманом; с другой стороны, Миллером была введена система обозначений при помощи символов, представляющих собою три целых рациональных числа, называемых индексами символа и получаемых на основании совершенно определенных правил.

Очень скоро оказалось, что система обозначений Миллера имеет такие существенные преимущества, сравнительно с обозначениями Леви и Наумана, что параллельно с символами, предложенными этими авторами, постоянно приходилось пользоваться и символами Миллера. В настоящее время, общеупотребительной является именно эта последняя система, причем символы Леви и Наумана почти совершенно не употребляются, так что их можно встретить только в старых монографиях и статьях.

В виду этого, мы здесь займемся рассмотрением только символов Миллера, а также символов A. Bravais, видоизмененных Е. С. Федоровым и принятых как этими авторами, так и вообще всеми современными кристаллографами для кристаллов гексагональной гипосингонии. Эти последние символы отличаются от символов Миллера тем, что они состоят из четырех целых рациональных чисел, также называемых индексами. Для получения этих символов необходимо иметь четыре кристаллографические оси, причем три из этих четырех осей лежат в одной плоскости.

## 2. СИМВОЛЫ РЕБЕР КОМПЛЕКСА.

Выберем три сопряженных ряда $x_1\bar{x}_1$, $x_2\bar{x}_2$, $x_3\bar{x}_3$ (рис. 151) пространственной решетки, пересекающихся в одной гомологической точке $O$ и не лежащих в одной плоской сетке, и примем эти ряды за кристаллографические оси. Ось $x_1\bar{x}_1$, направленную к наблюдателю, мы принимаем за первую кристаллографическую ось, причем ее положительное направление будет то, которое идет от точки $O$ к наблюдателю. За вторую ось мы принимаем ряд $x_2\bar{x}_2$, причем положительное направление для этой оси будет лежать вправо от точки $O$, а сама ось будет располагаться слева направо по отношению к наблюдателю. Ряд $x_3\bar{x}_3$ мы принимаем за

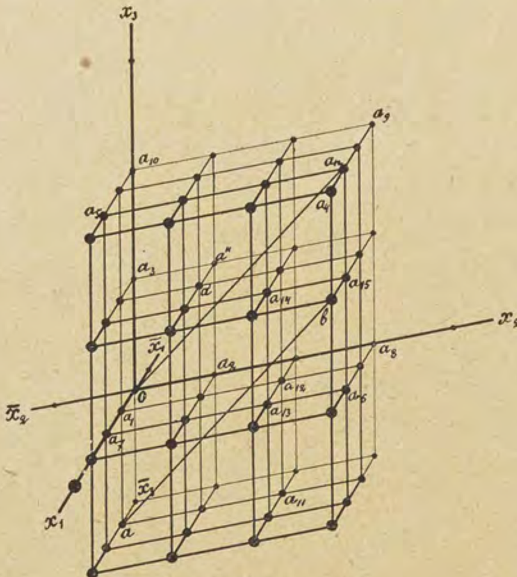



Рис. 151.

третью ось, расположенную вертикально, и ее положительное направление будет итти вверх от точки $O$. Отрицательные направления тех же осей будут расположены в обратном порядке по отношению к точке $O$. Если промежуток ряда по оси $Ox_1$, равен $c_1$, по $Ox_2$ равен $c_2$ и по $Ox_3$ равен $c_3$, то $Oa_1 = c_1$, $Oa_2 = c_2$ и $Oa_3 = c_3$.

Положим, у нас имеется некоторая гомологическая точка $a_n$ данной пространственной решетки; координаты этой точки мы можем определить, проведя из точки $a_n$ прямые

$$a_n a_4 \parallel Oa_1,\ a_n a_5 \parallel Oa_2 \text{ и } a_n a_6 \parallel Oa_3$$

до пересечения этих прямых с тремя плоскостями, каждая из которых определяется двумя кристаллографическими осями. Длины отрезков прямых $a_n a_4$, $a_n a_5$, $a_n a_6$, измеренные одинаковыми единицами длины, называются линейными координатами

данной точки $a_n$. Обозначив линейные координаты данной точки через $k_1$, $k_2$, $k_3$, мы можем назвать

$$\frac{k_1}{c_1} = t_1, \quad \frac{k_2}{c_2} = t_2 \text{ и } \frac{k_3}{c_3} = t_3$$

числовыми координатами или индексами символа данной гомологической точки $a_n$, причем заметим, что, при такой системе обозначений, $t_1$, $t_2$ и $t_3$ будут всегда целыми числами (положительными или отрицательными).

В самом деле, если за кристаллографические оси принять три сопряженные ряда пространственной решетки и провести через каждую гомологическую точку данной решетки три ряда, параллельные взятым кристаллографически осям, то мы получим систему элементарных параллелепипедов, (часть которой изображена на рис. 151) причем все гомологические точки решетки будут находиться в вершинах таких параллелепипедов. Так как, для получения символа данной точки, мы должны пройти непременно целое число промежутков по трем рядам, принятым за кристаллографические оси, чтобы дойти до вершины одного из таких параллелепипедов, а все гомологические точки находятся именно в вершинах, то ясно, $t_1$, $t_2$ и $t_3$ будут непременно целыми числами.

Вообще говоря, каждые три ряда пространственной решетки, пересекающиеся в одной гомологической точке $O$, не лежащие в одной плоской сетке и определяющие собою, следовательно, три плоские сетки, можно принять за три кристаллографические оси или за оси координат, т. е. за постоянные данные направления, положение которых известно. Приняв некоторые три ряда, удовлетворяющие вышеуказанным условиям, за координатные оси, мы можем определять положение каждой гомологической точки решетки, а также каждого ряда и каждой плоской сетки по отношению к выбранным осям координат.

Три плоские сетки, из которых каждая определяется двумя координатными осями, мы называем плоскостями координат, а общую точку $O$ пересечения этих плоскостей и осей — началом координат.

Если за оси координат мы примем три не сопряженных ряда данной пространственной решетки, то числовые координаты некоторых гомологических точек решетки уже не будут представлять собою целых чисел. Такими дробными числовыми координатами будут характеризоваться все те гомологические точки решетки, которые не будут находиться в вершинах параллелепипедов, построенных на единичных отрезках рядов, принятых за оси координат. Таким образом, мы будем иметь ясное отличие в случае принятия за оси координат трех не сопряженных рядов от того случая, когда за координатные оси приняты сопряженные ряды. В этом последнем случае каждую гомологическую точку пространственной решетки можно изобразить символом $[t_1, t_2, t_3]$, причем индексы этого символа, $t_1$, $t_2$ и $t_3$ будут целые числа.

Точка $O$, принятая за начало кристаллографических осей, получит символ [0, 0, 0]. Положим, точка $a_n$ имеет символ $[t_1, t_2, t_3]$. Соединив эту точку с точкой $O$ прямой $Oa_n$, получим ряд гомологических точек, расположенных на этой прямой. Индексы символов точек этого ряда будут целыми числами, причем соответственные индексы символов различных точек одного и того же ряда будут в целое число раз больше индексов символа точки ряда, ближайшей к началу $O$ кристаллографических осей. Если за кристаллографические оси приняты три сопряженных ряда пространственной решетки, то точка $[t_1, t_2, t_3]$ будет, очевидно, ближайшей к началу $O$, если только $t_1$, $t_2$ и $t_3$ не имеют общего делителя. Если же, напротив, $t_1$, $t_2$ и $t_3$ имеют некоторый общий делитель $m$, то символ $[t_1, t_2, t_3]$ будет представлять точку, находящуюся на расстоянии $m$ промежутков от точки $O$ и лежащую в том же ряде. Таким образом, каждую точку данного ряда мы можем изобразить символом $[mr_1, mr_2, mr_3]$, где $m$ и $r$ — целые числа. В виду этого, мы можем вполне определить какой угодно ряд, проходящий через точку $O$, обозначив его символом $[r_1 r_2 r_3]$, где $r_1$, $r_2$ и $r_3$ — целые числа, не имеющие общего делителя.

Эти числа называются числовыми координатами или индексами символа ряда, проходящего через точку $O$, причем они, по своей абсолютной величине, будут равны числовым коор-

динатам гомологической точки, находящейся в том же ряде и ближайшей к точке $O$.

Заметим, что в каждом ряде гомологических точек, проходящем через начало осей, имеются две точки, ближайшие к $O$ и лежащие по обе стороны на одинаковых расстояниях от $O$. Так как числовые координаты обоих таких точек удовлетворяют поставленным условиям для числовых координат ряда, причем индексы символов этих точек будут иметь обратные знаки, то и два символа $[r_1 r_2 r_3]$ и $[\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3]$ будут обозначать один и тот же ряд.

Как мы знаем, каждая гомологическая точка пространственной решетки будет совершенно равнозначна каждой другой гомологической точке той же решетки. В виду этого, мы всегда можем принять за начало осей координат или кристаллографических осей любую гомологическую точку данной пространственной решетки. Сохраняя первоначально выбранное направление кристаллографических осей, мы найдем для каждого ряда, параллельного ряду $Oa_n$, тот же символ $[r_1 r_2 r_3]$, если только примем за начало осей гомологическую точку, входящую в состав этого ряда, а направления осей возьмем параллельными соответственным рядам $Oa_1$, $Oa_2$, $Oa_3$. Таким образом, мы можем принять для обозначения всех рядов, параллельных данному — символ $[r_1 r_2 r_3]$.

Если мы примем за кристаллографические оси три несопряженных ряда решетки, то мы всегда можем получить символ какого угодно ряда, состоящий из трех индексов, которые будут опять целыми числами. Для этого необходимо только взять для обозначения данного ряда символ гомологической точки этого ряда, находящейся в ближайшей к началу координат вершине одного из параллелепипедов, построенных на единичных отрезках по кристаллографическим осям. Ясно, что такая точка будет иметь символ, состоящий из трех целых чисел индексов.

Так как каждое возможное ребро представляет, в данной пространственной решетке, ряд некоторого направления, определяемого двумя гомологическими точками, напр., $a$ и $b$, входящими в его состав, то и через общую для трех кристаллографических осей гомологическую точку $O$ мы мо-

жем провести ряд $Oa_n$, параллельный данному ребру. Этот ряд, как и всякий другой, будет характеризоваться определенным промежутком, соответствующим расстоянию между двумя ближайшими точками ряда.

В том случае, если за кристаллографические оси приняты три сопряженных ряда и между точками $a$ и $b$ (рис. 151) нет ни одной гомологической точки ряда, определяемого этими точками, то $ab$ и будет промежутком данного ряда, точно также, как и $Oa_n$, причем $O$ и $a_n$ будут также ближайшими друг к другу гомологическими точками данного ряда.

Каждые две кристаллографические оси $x_1$ и $x_2$; $x_2$ и $x_3$; $x_1$ и $x_3$ вполне определяют некоторую плоскую сетку пространственной решетки. Если мы проведем через точку $a_n$ плоские сетки, параллельные трем сеткам, определяемым кристаллографическими осями, то в результате такого построения получим параллелепипед, в вершинах которого будут находиться гомологические точки $O$, $a_7$, $a_8$, $a_9$, $a_6$, $a_{10}$, $a_5$ и $a_n$. Этот параллелепипед, вообще, не будет элементарным, так как не только в его вершинах, но и внутри его, и на его ребрах, и гранях будут находиться гомологические точки, напр. точки $a'$, $a_1$, $a''$. В общем случае, такой параллелепипед будет состоять из некоторого целого числа элементарных параллелепипедов (как напр. на рис. 151 такой параллелепипед состоит из 12-ти элементарных параллелепипедов).

Если мы определим число промежутков ряда на отрезках прямых, между точкой $O$ и каждой вершиной построенного параллелепипеда, т. е. количество промежутков ряда в отрезках $Oa_7$, $Oa_8$ и $Oa_{10}$, то каждое из трех полученных чисел будет равно индексу символа ребра. Для индексов символа ребра, в приведенном на рис. 151 примере, мы получаем 2 по оси $x_1$, 3 по оси $x_2$ и 2 по оси $x_3$, причем эти три числа будут положительны, так как соответствующие отрезки получены в положительных направлениях осей.

Мы можем найти значение индексов символа, определив число промежутков рядов, параллельных кристаллографическим осям, которое надо пройти для того, чтобы, исходя из точки $O$, достигнуть гомологической точки $a_n$. Для

этого, во взятом нами примере, можно сначала пройти 2 промежутка по оси $x_1$ в положительном направлении, затем пройти отрезок $a_7 a_6$ ряда, параллельного ряду, определяемому точками $O$ и $a_2$. Из свойств параллелепипеда мы знаем, что $Oa_8 = a_7 a_6$. В виду этого, проходя отрезок $a_7 a_6$, мы пройдем расстояние, равное трем промежуткам ряда $Oa_2$. Точно также, пройдя отрезок $a_6 a_n$, мы пройдем расстояние, равное двум промежуткам ряда $Oa_3$. То же самое получится, если провести из точки $a_n$ три линии рядов гомологических точек $a_n a_9$, $a_9 a_{10}$ и $a_{10} O$, параллельных рядам, принятым за кристаллографические оси, до пересечения этих трех линий с тремя плоскими сетками, каждая из которых определяется двумя кристаллографическими осями. Сделав такое построение и определив число промежутков по построенным рядам, найдем, в виду равенства отрезков: $Oa_7 = a_n a_9$ и $a_9 a_{10} = Oa_8$, опять тот же символ ребра, [232], состоящий из трех индексов 2, 3 и 2. То же количество промежутков рядов, соответствующих каждой кристаллографической оси, мы должны будем пройти, двигаясь по различным путям от точки $O$ по направлению к точке $a_n$ или, наоборот, от точки $a_n$ к точке $O$.

Вообще, какими бы путями, параллельными кристаллографическим осям, мы ни шли, мы всегда получим одно и то же количество промежутков по кристаллографическим осям, если примем во внимание направление пути и возьмем алгебраическую сумму пройденных расстояний. Например, мы можем пройти от точки $O$ до точки $a_n$ по пути $Oa_1\, aa_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_n$. Приняв во внимание направление движений по пройденным путям, мы получим:

$$a_1 a = -\tfrac{1}{2}\, Oa_{10}$$
$$a_{11}a_{12} = \tfrac{1}{2}\, Oa_{10}$$

| | | |
|---|---|---|
| $Oa_1 = \frac{1}{2}\, Oa_7$ | $aa_{11} = \frac{2}{3}\, Oa_8$ | $a_{13}a_{14} = \frac{1}{2}\, Oa_{10}$ |
| $a_{12}a_{13} = \frac{1}{2}\, Oa_7$ | $a_{14}a_{15} = \frac{1}{3}\, Oa_8$ | $a_{15}a_n = \frac{1}{2}\, Oa_{10}$ |
| в сумме $Oa_7$ | в сумме $Oa_8$ | в сумме $Oa_{10}$ |

Если мы умножим все индексы символа ребра на одно и то же целое рациональное число, то параллелепипед $OABCD$

(рис. 152), построенный на новых отрезках рядов, соответствующих кратным величинам индексов символа, будет подобен первоначально полученному параллелепипеду $Oabcd$, так как оба эти параллелепипеда будут иметь общую вершину, а именно точку $O$, и общий трехгранный угол при этой вершине, а именно $\angle OABC$, а кроме того соответственные ребра обоих параллелепипедов будут пропорциональны, так как для построения параллелепипеда $OABCD$ мы увеличим все отрезки по осям в одно и то же число раз. В виду этого, оба параллелепипеда будут иметь одну общую диагональ $OD$, соответствующую данному ребру, так как в конце диагонали первого параллелепипеда, а именно в точке $d$, будет находиться гомологическая точка пространственной решетки, а в конце диагонали второго параллелепипеда будет находиться также гомологическая точка $D$, принадлежащая тому же ряду, в котором находится и точка $d$, расположенная между точками $O$ и $D$. Между тем, по принятому условию получения символа ребра, точка $D$ должна быть ближайшей по направлению $OD$ к точке $O$.

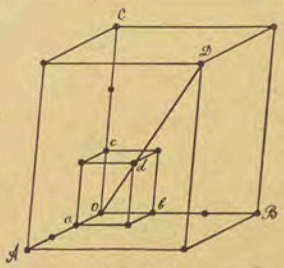


Рис. 152.

Таким образом, количество точек, лежащих на ребре искомого символа между точками $O$ и $D$, будет пропорционально общему делителю индексов символа.

Если этот делитель будет $n$, то количество промежуточных точек равно $n-1$. В виду только что изложенных соображений, мы всегда можем получить в качестве индексов символа ребра 3 числа, не имеющих общего делителя, и только символ, состоящий из таких индексов, мы и будем считать правильным. В случае получения символа с индексами, имеющими общих делителей, мы можем всегда сократить все индексы символа на эти делители, и таким образом получить правильный символ ребра.

Так как каждое возможное ребро кристаллического комплекса есть некоторый ряд пространственной решетки, то,

для какого угодно ребра кристалла, мы можем найти символ, состоящий из трех индексов в виде целых рациональных чисел, зная, с одной стороны, направление ребра и кристаллографических осей, а с другой, имея, в качестве данных, отношение единичных отрезков $c_1:c_2:c_3$ по кристаллографическим осям. Для нахождения символа ребра при таких данных мы можем воспользоваться следующим простым методом:

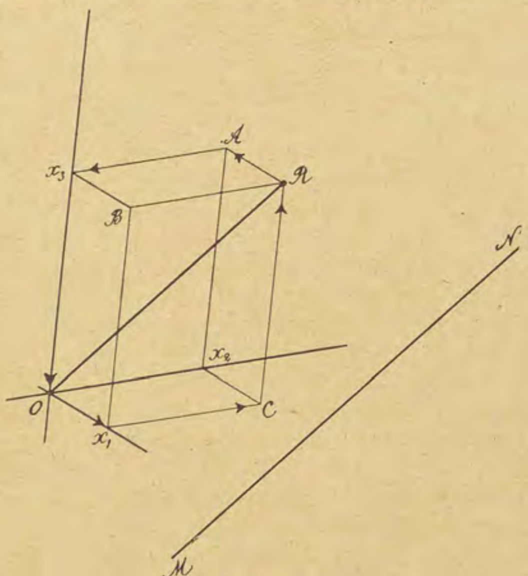



Рис. 153.

Положим (рис. 153), $MN$ — некоторое кристаллическое ребро, символ которого требуется определить, и $Ox_1$, $Ox_2$, $Ox_3$ — три кристаллографические оси. Проведем через точку $O$, параллельно ребру $MN$, линию $OR$, которая также будет рядом гомологических точек. Из произвольной точки $R$ этой прямой проведем следующие плоскости: $RAx_3B$ параллельно плоскости осей $Ox_1x_2$; $RAx_2C$ параллельно плоскости осей $Ox_1x_3$ и, наконец, плоскость $RBx_1C$ параллельно плоскости $Ox_2x_3$. Проведенные плоскости, вместе с тремя плоскостями

кристаллографических осей, дадут параллелепипед $Ox_1 BRAx_3$, гранями которого будут служить шесть вышеперечисленных плоскостей.

Сделав такое построение, измерим длины трех ребер $RA$, $RB$ и $RC$, параллельных кристаллографическим осям. Взяв отношения $\frac{RA}{c_1} : \frac{RB}{c_2} : \frac{RC}{c_3}$ и представив эти отношения в виде отношений трех целых чисел, не имеющих общих делителей, получим искомый символ ребра.

Мы можем вообще рассматривать символ ребра, как отношение отрезков прямых определенного направления, длины которых измеряются различными единицами. Такие отрезки, как известно, называются векторами, причем в каждом векторе различают начальную и конечную точки или начало и конец вектора и направление вектора, отмечаемое стрелкой.

Примем за начало первого вектора (рис. 153) $RA$ точку $R$. Из конечной точки $A$ этого вектора проведем вектор $Ax_3 \parallel Ox_2$. Из конечной точки $x_3$ этого второго вектора проведем вектор $x_3 O$, который совпадет с третьей кристаллографической осью. Отношение $\frac{RA}{c_1} : \frac{Ax_3}{c_2} : \frac{x_3 O}{c_3}$, выраженное в целых числах, даст искомый символ ребра. Для построения ребра, по данным его символам, мы можем также провести три вектора $Ox_1$, $x_1 C$ и $CR$ и найти положение ребра, соединив $R$ с $O$ прямой. При таком построении $RO$ будет называться замыкающим вектором.

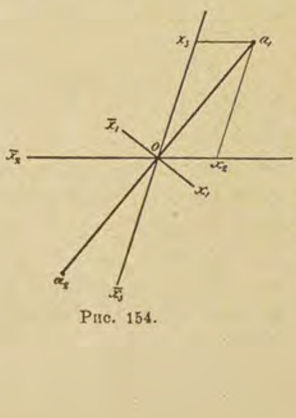


Рис. 154.

Одним из свойств бесконечного ряда гомологических точек является его симметричность относительно каждой гомологической точки. Приняв точку $O$ (рис. 154) ряда за начало кристаллографических осей и взяв гомологическую точку $a_1$ того же ряда на расстоянии $Oa_1$ в соответственном направлении, мы можем в том же ряде найти на расстоянии $Oa_2 = Oa_1$, но в прямо противоположном направлении от

точки $O$, гомологическую точку $a_2$. Таким образом, обе гомологических точки $a_1$ и $a_2$ мы можем рассматривать, с одинаковым правом, как точки ряда, ближайшие к точке $O$ и отличающиеся по своему положению относительно точки $O$ только тем, что для их нахождения мы должны передвигаться от точки $O$ в прямо противоположных направлениях. Совершенно ясно, что индексы символа ребра, сохранив свое абсолютное значение, получат обратные знаки, в зависимости от того, будем ли мы определять символ ребра, исходя из точки $a_1$ или из точки $a_2$. Таким образом, два символа, отличающиеся друг от друга только знаками, будут отмечать одно и то же ребро, рассматриваемое с разных концов.

Остановимся еще на некоторых специальных случаях в положении ребра, символ которого мы желаем определить.

1) Определить символ ребра, лежащего в плоскости, определяемой двумя кристаллографическими осями.

Положим, ребро $Oa_1$ (рис. 154) лежит в плоскости осей $Ox_3$ и $Ox_2$. Поступая по общему правилу, проводим из точки $a_1$ прямую $a_1x_3$ параллельно оси $Ox_2$ до пересечения с плоскостью $x_1Ox_3$, и $a_1x_2 \parallel Ox_3$ до пересечения с плоскостью $x_2Ox_3$. Так как $Oa_1$ лежит в плоскости $x_2Ox_3$, то прямые $a_1x_3$ и $a_1x_2$, будут также лежать в этой плоскости, и будут иметь определенные длины $t_2$ и $t_3$. Третий отрезок, параллельный оси $Ox_1$, в виду специального положения ребра, превращается в нуль. Таким образом, в качестве символа ребра мы получаем $[0r_2r_3]$, где $r_2 = \frac{kt_2}{c_2}$ и $r_3 = \frac{kt_3}{c_3}$, причем $k$ — некоторое число, на которое необходимо умножить $\frac{t_2}{c_2}$ и $\frac{t_3}{c_3}$, чтобы получить $r_2$ и $r_3$ в виде целых чисел.

2) Определить символ кристаллографической оси.

При определении символа ребра, параллельного одной из кристаллографических осей, мы поступаем согласно тому же самому правилу, которое применяется для нахождения символа ребра $[r_1r_2r_3]$. В этом частном случае, длины отрезков, параллельных двум осям, делаются равными нулю. Остается всего один индекс символа, не равный нулю, который полу-

чает неопределенное значение. В виду этого, его принимают за 1. Таким образом, символы кристаллографических осей будут для $x_1$ — [100], для $x_2$ — [010] и для $x_3$ — [001].

## 3. ЗАКОН РАЦИОНАЛЬНОСТИ ОТНОШЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ГРАНЕЙ.

Выбрав три произвольных ряда пространственной решетки, пересекающихся в одной точке и не лежащих в одной и той же плоской сетке, мы можем найти длины отрезков, отсекаемых произвольно взятой плоской сеткой на этих трех рядах, считая такие отрезки от точки пересечения рядов друг с другом до точки пересечения тех же рядов с выбранной плоской сеткой. Отношение длины каждого из полученных отрезков к длине промежутка соответствующего ряда называется параметром данной грани. Таким образом, каждая грань будет иметь в принятом нами случае три параметра, причем эти параметры, вообще говоря, будут некоторыми определенными числами.

Если считать закон Стенона первым основным законом геометрической кристаллографии, то вторым основным законом можно назвать закон, установленный французским кристаллографом René Just Haüy в 1871 г.

Второй основной закон геометрической кристаллографии утверждает, что отношение трех параметров каждой грани кристалла можно представить в виде отношения трех целых рациональных чисел. В виду этого, второй закон называется законом рациональности отношений параметров или законом Гаюи, по имени его автора.

Закон рациональности отношений параметров может быть выведен, как необходимое следствие ретикулярной теории строения кристаллического вещества.

Возьмем (рис. 155) какую-нибудь произвольную точку $O$ пространственной решетки и соединим ее прямой линией с другой совершенно произвольно взятой точкой той же решетки. Если мы продолжим линию, соединяющую эти две точки, то получим определенный ряд гомологических точек, находящихся на этой прямой. Точно таким же образом про-

ведем из первоначально взятой точки $O$ другой ряд гомологических точек, находящихся уже на другой прямой. Ясно, что два таких ряда гомологических точек вполне определяют некоторую плоскую сетку. Первый ряд гомологических точек мы обозначим $OA_1$, второй ряд $OA_2$, и проведем в той же сетке совершенно аналогичный и параллельный ряду $OA_2$ ряд $bb_1$, ближайший к ряду $OA_2$. Если ряд $OA_1$ проходит через какую-нибудь точку ряда $bb_1$, то мы получаем два сопряженных между собой ряда $OA_1$ и $OA_2$.

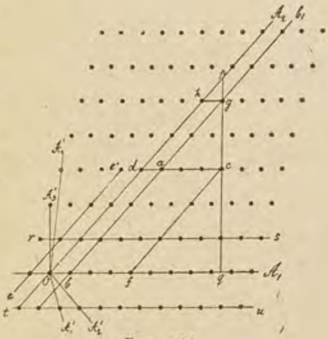


Рис. 155.

Если мы проведем из каждой точки ряда $OA_1$ линию, параллельную ряду $OA_2$, и то же самое сделаем относительно ряда $OA_2$, т. е. проведем из каждой его точки линию, параллельную $OA_1$, то полученная нами сеть прямых захватит все точки данной плоской сетки. Получить такую сеть прямых мы можем только в том случае, если два первоначально взятых исходных ряда $OA_1$ и $OA_2$ суть ряды сопряженные. Эти два исходных ряда будут сопряжены каждый раз, если второй ряд $OA_2$ будет проходить через одну из точек ряда $rs$, ближайшего к ряду $OA_1$ и параллельного этому последнему. Если же этого нет, то два ряда, принятых за исходные, как например, два ряда $OA'_1$ и $OA_2$ не будут сопряженными рядами. В таком случае, наши прямые, проведенные из каждой точки ряда $OA'_1$ параллельно ряду $OA_2$ и наоборот, т. е. из каждой точки ряда $OA_2$ параллельно ряду $OA'_1$, не дадут сети прямых, охватывающих все точки данной плоской сетки. Возьмем в той же плоской сетке, определяемой рядами $OA_1$ и $OA_2$, две какие-нибудь совершенно произвольные точки $c$ и $g$ и соединим их прямой. Продолжив линию $cg$ до пересечения с линией $OA_2$, найдем точку $p$. Для пересечения той же прямой с линией $OA_1$ таким же путем найдем точку $q$. Проведем через точку $c$

линию $ca$ параллельно линии $OA_1$ и через точку $g$ линию $ga$ параллельно линии $OA_2$. Положим, $Op$ относится к $Oq$, как $p:q$. Приняв $Op$ и $Oq$ за кристаллографические оси с единичными отрезками по $OA_1 = c_1$ и по $OA_2 = c_2$, найдем для точки $c$ числовые координаты $mn$, а для точки $g$ числовые координаты $kl$. Перенеся начало кристаллографических осей из точки $O$ в точку $a$, мы делаем, по направлению, параллельному $OA_1$, движение, которое выразится линией $da = Ob$, а по направлению $OA_2$ движение, выражающееся линией $fc = ba$.

Так как точка $c$ теперь лежит на кристаллографической оси $ac$, то ее числовые координаты $mn$ превратятся в $m' = m - k$ и $n' = O$. Точно также для точки $g$ соответственно получатся числовые координаты: $k' = O$ и $l' = l - n$.

Проведем из точки $g$ прямую $gh \parallel OA_1$, а из точки $c$ прямую $cf \parallel OA_2$. Проведенные нами прямые $gb$ и $dc$ пересекутся между собой в точке $a$ плоской сетки. Треугольники $agc$ и $Opq$ — подобны, в виду параллельности соответствующих сторон. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то мы найдем из треугольников $agc$ и $Opq$ — $Op:Oq = ag:ac$, а это последнее отношение равно $p:q = m':l'$, т. е. отношению целых чисел.

Из этого мы выводим заключение, что всякий произвольный ряд сетки, или возможное ребро, отсекает на всяких двух, произвольно взятых рядах той же сетки, отрезки, пропорциональные целым числам промежутков соответственного ряда. Проведя из точки $O$ третий ряд $OA_3$, не находящийся в плоскости, определяемой двумя рядами $OA_1$ и $OA_2$, мы можем принять все три ряда $OA_1$, $OA_2$ и $OA_3$ за три кристаллографические оси. В таком случае, все то, что было доказано для плоскости двух кристаллографических осей $OA_1$ и $OA_2$, т. е. для взятой нами первоначально плоской сетки, определяемой этими двумя линиями, мы можем доказать как для плоскости $OA_2\,OA_3$, так и для плоскости $OA_1\,OA_3$.

Действительно, если доказанный вывод справедлив для плоскости $OA_1\,OA_2$, то он также будет справедлив и для двух других плоскостей $OA_2\,OA_3$ и $OA_1\,OA_3$.

Отсюда прямо выводится закон рациональности отношений параметров, который может быть формулирован таким образом: произвольно взятая плоская сетка отсекает три произвольно взятых ряда пространственной решетки в отрезках, пропорциональных целым числам промежутков ряда.

Этот закон будет справедлив как в том случае, когда два произвольно взятых ряда пространственной решетки будут сопряжены между собой, так и в том случае, если эти два произвольно взятых ряда будут рядами не сопряженными.

## 4. СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ КОМПЛЕКСА.

Возьмем три ряда пространственной решетки, не лежащие в одной сетке и пересекающиеся между собой в одной гомологической точке. Ясно, что всякая плоская сетка пространственной решетки непременно пересечет, по крайней мере, один из этих рядов. В общем случае, произвольно взятая плоская сетка пересечет все три ряда, причем возможны различные случаи пересечения рядов данной плоской сеткой, а именно: 1) все три ряда пересекутся в гомологических точках; 2) два ряда будут пересекаться в гомологических точках, а третий в промежутке; 3) один ряд пересечется в гомологической точке, а два других в промежутках и 4) все три ряда пересекутся в промежутках.

Какой бы из этих четырех случаев пересечения мы ни взяли, как мы знаем, всегда будет справедлив закон рациональности отношений параметров, утверждающий, что каждая плоская сетка пространственной решетки отсекает на трех произвольно взятых рядах той же решетки отрезки, пропорциональные целым числам промежутков рядов. Как мы видели при выводе закона рациональности отношений параметров, такое соотношение отрезков вытекает из возможности провести плоскую сетку, параллельную данной, взяв некоторую определенную гомологическую точку на каждом из трех выбранных рядов, не лежащих в одной плоской сетке. Другими словами, передвигая данную плоскую сетку параллельно самой себе взад и вперед, по направлению к точке пересечения трех выбранных рядов, мы всегда можем

найти неопределенно большое количество плоских сеток, параллельных данной и пересекающих три выбранные ряда в гомологических точках. Одна из таких плоских сеток будет ближайшей к точке пересечения трех выбранных рядов.

Приняв эти 3 ряда за кристаллографические оси и определив количество промежутков в отрезках по этим осям, отсекаемых ближайшей к началу осей плоской сеткой, проходящей через гомологические точки на осях, найдем параметры данной грани. Эти параметры будут непременно целыми числами и притом не будут иметь общих делителей.

В самом деле, если бы эти числа имели общих делителей, то это обозначало бы, что, уменьшив отрезки по кристаллографическим осям на одно и то же целое количество промежутков, мы могли бы получить опять три гомологические точки на тех же осях. Эти точки снова определили бы плоскую сетку, параллельную данной, но лежащую ближе к началу осей, чем сетка, для которой были определены отрезки, имеющие общий делитель. Таким образом, параметры грани должны быть числами целыми и не имеющими общих делителей. Отсюда ясно, что параметры грани мы можем представить в виде отношения трех целых чисел, которые будут взаимно простыми.

Положим, мы имеем параметры некоторой грани $q_1 : q_2 : q_3$, где $q$ — целые взаимно простые числа. Разделив единицу на каждое такое число, получим: $\frac{1}{q_1} : \frac{1}{q_2} : \frac{1}{q_3}$. Это отношение мы можем преобразовать в отношение трех целых чисел, умножив его на $q_1 q_2 q_3$; получаем $q_2 q_3 : q_1 q_3 : q_1 q_2$. Если $k$ — общий делитель для чисел $q_2 q_3$, $q_1 q_3$, $q_1 q_2$, то $\frac{q_2 q_3}{k} : \frac{q_1 q_3}{k} : \frac{q_1 q_2}{k} = p_1 : p_2 : p_3$. Понятно, что общий делитель $k$ появится только в том случае, если два из трех параметров будут иметь этот делитель.

Отношение $p_1 : p_2 : p_3$ изображается, обыкновенно, в виде $(p_1 p_2 p_3)$ и называется символом грани, а числа $p$ — индексами этого символа.

Из только что сказанного вытекает, что, если известны $c_1 : c_2 : c_3$ и положение кристаллографических осей, то для

нахождения символа данной грани мы можем поступить следующим образом. Измерим отрезки по кристаллографическим осям, отсекаемые данной гранью. Взяв отношение полученных длин и разделив каждое число отношения на соответственные числа отношений единичных отрезков, получим числа, пропорциональные параметрам данной грани. Взяв обратные отношения, получим числа, пропорциональные индексам символа той же грани. Для получения индексов символа остается только представить эти последние отношения в виде отношения трех целых чисел, не имеющих общего делителя.

## 5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СИМВОЛАМИ ГРАНЕЙ И РЕБЕР.

Положим, нам даны две грани, имеющие символы $(p_1 p_2 p_3)$ и $(p'_1 p_2 p'_3)$ и отсекающие на кристаллографических осях $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$ (рис. 156) отрезки $Oa_1$, $Oa_2$, $Oa_3$ и

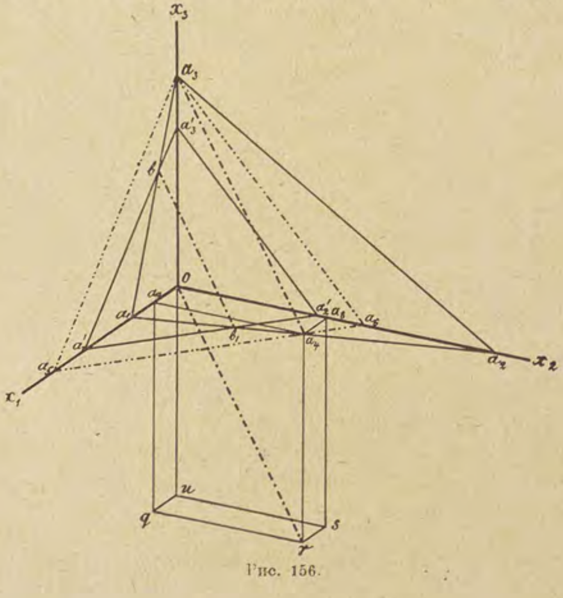



Рис. 156.

$Oa_1'$, $Oa_2'$, $Oa_3'$. Если $c_1 : c_2 : c_3$ есть отношение единичных отрезков по кристаллографическим осям, то мы можем выразить данные отрезки через индексы символов граней, а именно:

$$Oa_1 = \frac{mc_1}{p_1}; \quad Oa_2 = \frac{mc_2}{p_2}; \quad Oa_3 = \frac{mc_3}{p_3} \tag{1}$$

$$Oa_1' = \frac{nc_1}{p_1'}; \quad Oa_2' = \frac{nc_2}{p_2'}; \quad Oa_3' = \frac{nc_3}{p_3'} \tag{2}$$

Пусть $bb_1$ — ребро взаимного пересечения данных граней, причем точки $b_1$ и $b$ являются точками пересечения этого ребра с соответственными плоскостями осей $x_1Ox_2$ и $x_1Ox_3$. Переместим грань $(p_1'p_2'p_3')$ параллельно самой себе так, чтобы отрезок, отсекаемый этой гранью на оси $Ox_3$, сделался равным $Oa_3$. После такого перемещения грани $(p_1'p_2'p_3')$, отрезки, отсекаемые ею на осях $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$, будут $Oa_5$, $Oa_6$ и $Oa_3$, а линия пересечения граней также переместится и займет положение $a_3a_4$ в направлении, параллельном $bb_1$.

Проведем через начало кристаллографических осей $O$ линию $Or$, параллельную $bb_1$, и отложим на ней отрезок $Or$, равный по длине $a_3a_4$. Через точку $r$ проведем три плоскости:

$$rsuq \parallel x_1Ox_2; \quad rsa_8a_4 \parallel x_1Ox_3 \quad \text{и} \quad rqa_7a_4 \parallel x_2Ox_3.$$

В результате такого построения получим параллелепипед $rqusa_8a_4a_7O$, по длинам ребер которого мы можем определить символ ребра $Or$ или, что то же, в виду их параллельности, символ ребра $bb_1$. Заметим, что, по построению, прямая $a_3a_4$ равна и параллельна $Or$, а следовательно:

$$Oa_3 = a_4r = ou.$$

Таким образом, индексы символа ребра $Or$ могут быть выражены:

$$r_1 = \frac{Oa_7}{c_1k}; \quad r_2 = \frac{Oa_8}{c_2k} \quad \text{и} \quad r_3 = -\frac{Oa_3}{c_3k},$$

где $c_1 : c_2 : c_3$ — отношение единичных отрезков по кристаллографическим осям, а $k$ — некоторый коэффициент пропорциональности. Определяя из этих выражений $Oa_7$, $Oa_8$ и $Oa_3$, находим:

$$Oa_7 = r_1c_1k; \quad Oa_8 = r_2c_2k; \quad Oa_3 = r_3c_3k. \tag{3}$$

В виду подобия треугольников $Oa_5a_3$ и $Oa'_1a'_3$ находим: $\frac{Oa_5}{Oa'_1} = \frac{Oa_3}{Oa'_3}$. Точно также, из подобия треугольников $Oa_3a_6$ и $Oa'_3a'_2$ имеем: $\frac{Oa_6}{Oa'_2} = \frac{Oa_3}{Oa'_3}$. Из этих выражений получаем:

$$Oa_5 = \frac{Oa_3 \cdot Oa'_1}{Oa'_3} \quad \text{и} \quad Oa_6 = \frac{Oa_3 \cdot Oa'_2}{Oa'_3}. \tag{4}$$

Так как, по построению, линии $a_4a_7$ и $Ox_2$ параллельны, то треугольники $Oa_2a_1$ и $a_7a_4a_1$ подобны. Точно также подобны треугольники $Oa_6a_5$ и $a_7a_4a_5$. Из подобия этих треугольников получаем:

$$\frac{Oa_2}{a_4a_7} = \frac{Oa_1}{a_7a_1} \quad \text{и} \quad \frac{Oa_6}{a_4a_7} = \frac{Oa_5}{a_7a_5}.$$

Представив эти отношения в виде:

$$Oa_2 \cdot a_7a_1 = Oa_1 \cdot a_4a_7; \quad Oa_6 \cdot a_7a_5 = Oa_5 \cdot a_4a_7$$

и заметив, что

$$a_7a_1 = Oa_1 - Oa_7, \text{ а } a_7a_5 = Oa_5 - Oa_7$$

и, кроме того, по построению $a_4a_7 = Oa_8$, находим:

$$Oa_2(Oa_1 - Oa_7) = Oa_1 \cdot Oa_8 \tag{5}$$

$$Oa_6(Oa_5 - Oa_7) = Oa_5 \cdot Oa_8. \tag{6}$$

Приняв в уравнениях (5) и (6) за неизвестные $Oa_7$ и $Oa_8$ и подставив вместо $Oa_5$ и $Oa_6$ соответствующие им величины из выражения (4), получаем:

$$Oa_7 = \frac{Oa_1 \cdot Oa'_1}{Oa'_3} \cdot \frac{Oa_2 \cdot Oa'_3 - Oa_3 \cdot Oa'_2}{Oa_2 \cdot Oa'_1 - Oa_1 \cdot Oa_2} \tag{7}$$

$$Oa_8 = \frac{Oa_2 \cdot Oa'_1}{Oa'_3} \cdot \frac{Oa_3 \cdot Oa'_1 - Oa_1 \cdot Oa'_3}{Oa_2 \cdot Oa'_1 - Oa_1 \cdot Oa'_2}. \tag{8}$$

Подставив в этих уравнениях вместо $Oa_1$, $Oa_2$ и $Oa_3$ их значения из выражений (1), вместо $Oa'_1$, $Oa'_2$ и $Oa'_3$ их значения из выражений (2) и, наконец, вместо $Oa_7$ и $Oa_8$ их значения из равенств (3), а также, произведя соответственные сокращения, получаем:

$$r_1 = \frac{m}{kp_3} \cdot \frac{p_3p'_2 - p_2p'_3}{p_1p'_2 - p_2p'_1}, \quad r_2 = \frac{m}{kp_3} \cdot \frac{p_3p'_1 - p_1p'_3}{p_1p'_2 - p_2p'_1}$$

и на основании равенства (4):

$$r_3 = -\frac{m}{kp_3}.$$

Приняв
$$t = \frac{m}{kp_3} \cdot \frac{1}{p_1p_2' - p_2p_1'},$$

из только что найденных выражений получаем:

$$r_1 = (p_3p_2' - p_2p_3')\,t \tag{9}$$
$$r_2 = (p_3p_1' - p_1p_3')\,t \tag{10}$$
$$r_3 = (p_2p_1' - p_1p_2')\,t \tag{11}$$

Взяв отношение этих трех выражений, получаем:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (p_3p_2' - p_2p_3') : (p_3p_1' - (p_1p_3') : p_2p_1' - p_1p_2') \tag{12}$$

т. е. отношение $r_1 : r_2 : r_3$ будет равно отношению миноров детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \end{vmatrix}$$

разложенного по первой строке.

Для такого разложения, мы можем употребить простой прием. Напишем два раза $p_1p_2p_3$ и $p_1'p_2'p_3'$, поместив под индексами символа первой грани соответственные индексы символа второй грани. Отделим первый и последний столбец и перемножим находящиеся между отделенными столбцами величины наискось сверху вниз, после чего сделаем вычитание произведений, соединенных перекрещивающимися линиями.

$$\begin{array}{c|cccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_1 & p_2 & p_3 \\ & \times & \times & \times & & \\ p_1' & p_2' & p_3' & p_1' & p_2' & p_3' \end{array}$$

$$\underset{= r_1}{p_2p_3' - p_2'p_3}; \quad \underset{= r_2}{p_3p_1' - p_3'p_1}; \quad \underset{= r_3.}{p_1p_2' - p_1'p_2}$$

Умножив выражения (9) на $p_1$, выражение (10) на $p_2$ и выражение (11) на $p_3$, получим:

$$r_1p_1 = (p_1p_3p_2' - p_1p_2p_3')\,t$$
$$r_2p_2 = (p_2p_3p_1' - p_1p_2p_3')\,t$$
$$r_3p_3 = (p_2p_3p_1' - p_1p_3p_2')\,t.$$

Сложив эти выражения, находим

$$r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) дает соотношение, существующее между индексами символа грани и символа ребра, находящегося в этой грани. Это — общее уравнение, устанавливающее связь между символом ребра и грани, проходящих через начало кристаллографических осей — точку $O$.

Имея два таких уравнения, всегда возможно: 1) по символам двух граней определить символ ребра их пересечения и 2) по символам двух ребер найти символ грани, определяемой этими ребрами.

Так как нами только что было сделано определение символа ребра пересечения двух граней по их символам, причем мы пришли к выражению (12), то в выражениях (9), (10) и (11) должно заключаться и второе уравнение, аналогичное (13). В самом деле, умножив (9) на $p_1'$, (10) на $p_2'$ и (11) на $p_3'$, получаем:

$$r_1p_1' = (p_1'p_3p_2' - p_1'p_2p_3')\,t$$
$$r_2p_2' = (p_2'p_3p_1' - p_2'p_1p_3')\,t$$
$$r_3p_3' = (p_3'p_2p_1' - p_3'p_1p_2')\,t$$

Сложив эти выражения, находим: $r_1p_1' + r_2p_2' + r_3p_3' = 0$, а это и есть уравнение, аналогичное уравнению (13).

Принимая во внимание, что каждая возможная грань кристаллического комплекса есть одна из плоских сеток пространственной решетки, мы можем также определить выражение (13), как уравнение для плоской сетки и находящегося в ней ребра, причем и сетка и ребро проходят через начало кристаллографических осей.

Возьмем некоторую плоскую сетку символа $(p_1p_2p_3)$, проходящую через начало кристаллографических осей. Если числовые координаты некоторой гомологической точки, находящейся в данной плоской сетке, будут $r_1$, $r_2$, $r_3$, то, вообще говоря, для такой сетки мы выведем уравнение

$$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 = 0.$$

Всякая плоская сетка, параллельная данной сетке символа $(p_1 p_2 p_3)$ и не проходящая через начало кристаллографических осей, будет характеризоваться уравнением:

$$p_1 r_1' + p_2 r_2' + p_3 r_3' = C,$$

где $p_1$, $p_2$, $p_3$ — индексы символа данной плоской сетки, а $r_1'$, $r_2'$, $r_3'$ — числовые координаты некоторой гомологической точки, лежащей в построенной нами сетке, параллельной данной. Так как $p_1$, $p_2$, $p_3$, $r_1'$, $r_2'$, $r_3'$ — целые числа, то и $C$ должно быть некоторым целым числом. Рассматривая ряд положительных и отрицательных целых чисел, мы видим, что наименьшим, по абсолютной величине, целым числом будет нуль; следующее за ним целое число — единица и т. д.

Таким образом, мы можем заключить, что две плоские сетки, смежные с сеткой, характеризующейся уравнением $p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = O$, будут такие сетки, которые характеризуются уравнениями:

$$p_1 r_1' + p_2 r_2' + p_3 r_3' = +1 \text{ и}$$
$$p_1 r_1'' + p_2 r_2'' + p_3 r_3'' = -1.$$

## 6. ИЗОТРОПНЫЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС.

Мы называем изотропным кристаллическим комплексом такой, в котором плоскость, перпендикулярная к какому угодно возможному ребру, будет параллельна возможной грани. При этом условии, все пояса изотропного комплекса должны быть изотропными.

В самом деле, взяв любую грань данного пояса, мы можем найти перпендикулярное к ней ребро, которое будет, в то же время, перпендикулярно некоторому возможному ребру, лежащему в данной грани и параллельному оси данного пояса. Это последнее ребро, вместе с найденным перпендикулярным к данной грани ребром, будет определять некоторую возможную грань, перпендикулярную данной и принадлежащую тому же самому поясу граней.

Из ретикулярной теории строения кристаллического вещества с логической необходимостью вытекает возможность существования двух, совершенно различных, несовместимых

друг с другом, типов кристаллов — кубического и гипогексагонального. Как кубический, так и гипогексагональный типы имеют совершенно особые, несовместимые друг с дру-

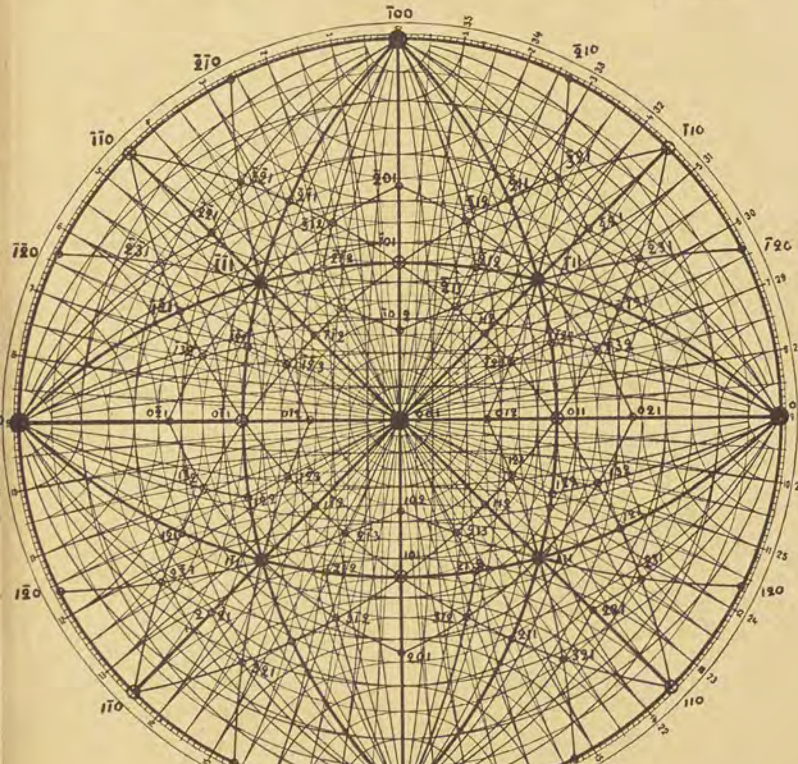



Рис. 157.

гом изотропные комплексы: 1) кубически-изотропный (рис. 157), характеризующий кристаллы кубической сингонии и 2) гексагонально-изотропный (рис. 158), представителями которого могут служить кристаллы минерала берилла.

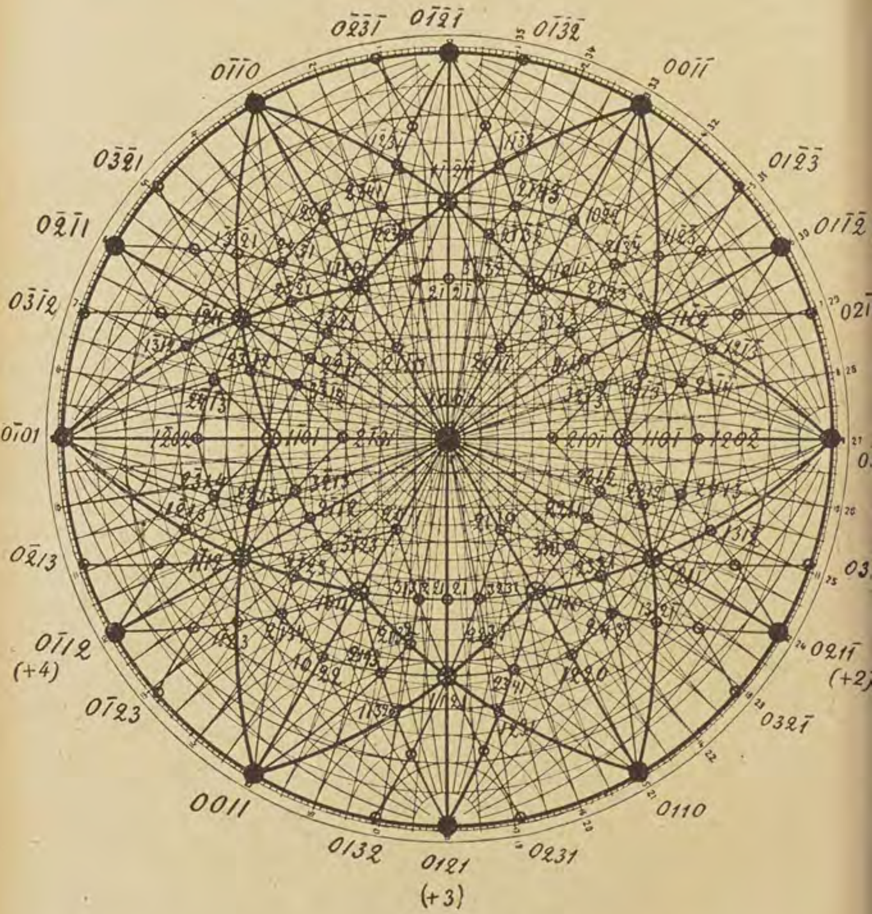



Рис. 159.

Таким образом, в природе, в царстве кристаллов, представлены исключительно только эти оба изотропных комплекса и, в то же время, они являются типическими представителями безконечно изменчивых объектов, так как каж-

дый природный кристалл может быть представлен, как деформированный по определенному закону кубический или гексагональный изотропный комплекс. Соответственно этому, мы можем констатировать разделение всех кристаллов на два типа — кубический и гипогексагональный.

## 7. ИЗОТРОПНЫЙ КОМПЛЕКС ГЕКСАЭДРИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ.

Можно легко доказать, что кристаллические комплексы гексаэдрической сингонии изотропны. Возьмем какое-нибудь возможное ребро *od* (рис. 159) кристаллического комплекса гексаэдрической сингонии. Пусть символ этого ребра будет $[r_1 r_2 r_3]$, причем *oa* — первая, *ob* — вторая и *oc* — третья кристаллографические оси. Для кристаллических комплексов гексаэдрической сингонии единичные отрезки по трем кристаллографическим осям, как известно, равны, а оси взаимно перпендикулярны. Отложив на соответственных осях отрезки $r_1$, $r_2$ и $r_3$, построим определяющий параллелепипед $oa_1a_2da_3$, взяв за длины ребер этого параллелепипеда промежутки рядов по направлениям *oa*, *ob* и *oc*, по одному промежутку в каждом направлении. При таком построении, в точке *d* должна обязательно, как мы знаем, оказаться одна из гомологических точек

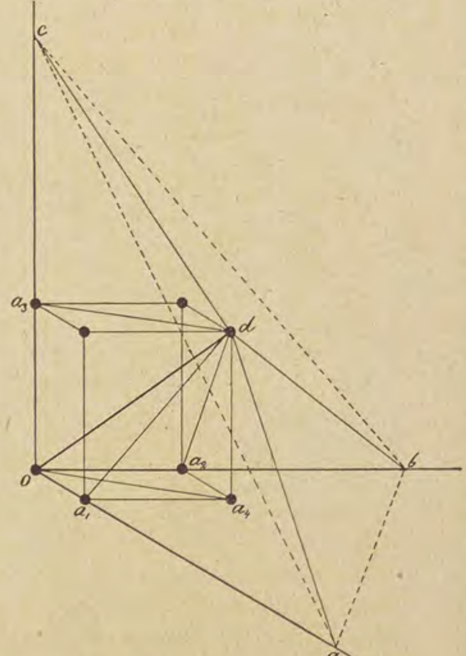



Рис. 159.

гексаэдрической пространственной решетки. Проведем ряды $da_1$, $da_2$ и $da_3$. Эти ряды будут перпендикулярны к соответственным кристаллографическим осям, а именно: $da_1 \perp oa$, $da_2 \perp ob$ и $da_3 \perp oc$. Восставим из точки $d$ перпендикуляры к линии $od$ в плоскостях, определяемых этой линией и одной из кристаллографических осей: $da \perp od$, $db \perp od$ и $dc \perp od$.

Сделав такое построение, получим три прямоугольных треугольника $oda$, $odb$ и $odc$. В каждом таком треугольнике, как например в треугольнике $odc$, на гипотенузу $oc$ опущен перпендикуляр $da_3$ из вершины $d$ прямого угла. Так как по построению $da_3 \perp oc$, то на основании теоремы, доказываемой в элементарной геометрии: „Если в прямоугольном треугольнике опустить перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу, то этот перпендикуляр будет средней пропорциональной между отрезками гипотенузы", будем иметь: $(da_3)^2 = oa_3 \cdot ca_3$.

Так как $da_3 = oa_4 = \sqrt{(oa_1)^2 + (oa_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, а $oa_3 = r_3$, то, подставив эти величины в только что полученное выражение, находим:

$$ca_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_3} \qquad (1)$$

Точно также из треугольников $odb$ и $oda$ получаем

$$ba_2 = \frac{r_1^2 + r_3^2}{r_2} \qquad (2)$$

и

$$aa_1 = \frac{r_2^2 + r_3^2}{r_1} \qquad (3)$$

Каждые два из трех направлений $da$, $db$ и $dc$, перпендикулярных к данному ребру $od$ кристаллического комплекса, вполне определяют положение плоскости $abc$, перпендикулярной к $od$. Эта плоскость будет возможной гранью кристаллического комплекса, если только отношение длин отрезков, отсекаемых ею на кристаллографических осях, будет равно отношению целых рациональных чисел.

Отрезки, отсекаемые плоскостью $abc$ на кристаллографических осях, будут, как это видно из чертежа: $oa$, $ob$ и $oc$.

Положим: $oa = d_1$; $ob = d_2$ и $oc = d_3$.

Заметим, что

$$oa = oa_1 + a_1 a = r_1 + aa_1$$

$$ob = oa_2 + a_2 b = r_2 + ba_2$$

$$oc = oa_3 + a_3 c = r_3 + ca_3.$$

Подставив в эти равенства вместо $aa_1$, $ba_2$ и $ca_3$ их значения из выражений (1), (2) и (3), находим:

$$d_1 = oa = r_1 + \frac{r_2^2 + r_3^2}{r_1} = \frac{1}{r_1}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \qquad (4)$$

$$d_2 = ob = r_2 + \frac{r_1^2 + r_3^2}{r_2} = \frac{1}{r_2}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \qquad (5)$$

$$d_3 = oc = r_3 + \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_3} = \frac{1}{r_3}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \qquad (6)$$

Взяв отношение выражений (4), (5) и (6), получаем:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3}. \qquad (7)$$

Умножив вторую часть равенства (7) на $r_1 r_2 r_3$, получаем:

$$d_1 : d_2 : d_3 = r_2 r_3 : r_1 r_3 : r_1 r_2.$$

Так как $r_1$, $r_2$ и $r_3$ — целые рациональные числа, то и $d_1 : d_2 : d_3$ будет, очевидно, равно отношению трех целых рациональных чисел. В виду этого, плоскость $abc$, перпендикулярная к ребру $od$, будет возможной гранью кристаллического комплекса, причем $d_1$, $d_2$ и $d_3$, будут пропорциональны параметрам этой грани.

Так как отношение индексов символа грани $(p_1 p_2 p_3)$ обратно пропорционально отношению параметров той же грани, то из выражения (7) мы можем вывести:

$$\frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3} = p_1 : p_2 : p_3 = r_1 : r_2 : r_3, \qquad \text{откуда:}$$

$$p_1 = r_1, \quad p_2 = r_2 \quad \text{и} \quad p_3 = r_3.$$

Таким образом, в изотропном комплексе гексаэдрической сингонии символ грани и ребра, к ней перпендикулярного, будут одинаковы, причем индексы этих символов не будут отличаться ни по порядку ни по знаку.

## 8. СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ ПРОСТЫХ ФОРМ КУБИЧЕСКИ-ИЗОТРОПНОГО КОМПЛЕКСА.

Для обозначения граней и ребер кубически-изотропного комплекса символами, мы принимаем за кристаллографические оси $3\,L^4$ комплексиальной симметрии, причем единичные отрезки по этим осям, в виду равенства всех четверных осей, должны быть также равны друг другу.

Мы можем рассматривать выражение $(p_1 p_2 p_3)$, как символ некоторой возможной грани комплекса, если только $p_1$, $p_2$ и $p_3$ — целые рациональные числа. Эти числа могут быть и положительными и отрицательными, а их порядок зависит только от того, по какой из равных кристаллографических осей данная грань отсекает соответствующий отрезок. Знак минус, в символе грани, мы будем ставить над индексом, к которому этот знак относится, знак же + мы совершенно не ставим.

Положим, нам дана грань, отсекающая на каждой из трех кристаллографических осей одинаковое количество единичных отрезков. Символ такой грани будет (111), причем, если мы возьмем все возможные грани, удовлетворяющие поставленному условию, то легко убедимся, что таких граней будет всего 8. Их символы будут следующие:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & (111) & (\bar{1}11) & (1\bar{1}1) & (11\bar{1}) \\ \text{II} & (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) & (1\bar{1}\bar{1}) & (\bar{1}1\bar{1}) & (111) \end{array}$$

Как мы видим, все эти символы будут отличаться друг от друга только знаками, поставленными над теми индексами, к которым они относятся. Рассматривая написанные в двух строках символы, мы видим, что символы I строки представляют собою непараллельные друг другу грани, а каждый символ II строки обозначает грань, параллельную той грани первой строки, под символом которой он помещен. Таким образом, символы двух параллельных граней будут иметь те же индексы, расположенные в том же порядке, но имеющие прямо противоположные знаки.

Мы видим, кроме того, что индексы символов I строки или совершенно не будут иметь минусов или будут иметь

только один минус. Ясно, что таких возможностей, при трех индексах в символе, может быть только четыре, наоборот, индексы символов II строки или совершенно не будут иметь плюсов, т. е. все три будут отрицательными, как у первого символа II строки, или будут иметь только по одному положительному индексу, как второй, третий и четвертый символы II строки. Таких возможностей будет тоже только 4. Таким образом, в нашем случае мы исчерпали все возможные способы изменения знаков индексов символа и получили всего [illegible] символов. В случае кубически-изотропного комплекса, эти все символы будут обозначать грани одной и той же простой формы, а именно октаэдра.

Таким образом, в приведенном примере количество возможных изменений символа, путем изменения знаков его индексов, соответствует количеству граней в простой форме, отмечаемой этим символом. Для обозначения всех граней простой формы мы принимаем тот символ одной из ее граней, в котором имеется наименьшее число отрицательных индексов и ставим его в фигурные скобки. Таким образом, символ октаэдра, как простой формы, будет $\{111\}$. Если символ формы будет состоять из различных индексов, то для его получения мы будем, по возможности, брать символ той грани, для которой будет иметь место неравенство: $p_1 > p_2 > p_3$.

Мы знаем, что грани куба перпендикулярны к $L^4$. Если $3\,L^4$ будут кристаллографическими осями, как это и принимается для кубически-изотропного комплекса, то грани куба будут перпендикулярны к кристаллографическим осям. Возьмем грань куба, перпендикулярную к первой кристаллографической оси. Эта грань будет параллельна второй и третьей кристаллографическим осям, так как плоскость, проходящая через эти последние оси, перпендикулярна первой кристаллографической оси. Отрезки, которые отсекает взятая грань куба на кристаллографических осях, будут: по первой оси некоторый отрезок $n$, а по второй и третьей $\infty$. Таким образом, символ грани куба, перпендикулярной к первой кристаллографической оси, будет (100). Точно также, символы граней куба, перпендикулярных к положительным концам второй и третьей кристаллографических осей, будут (010)

и (001). Если мы еще сюда прибавим три грани куба, перпендикулярные к отрицательным концам кристаллографических осей, то получим всего шесть символов:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | (100) | (010) | (001) |
| II | $(\bar{1}00)$ | $(0\bar{1}0)$ | $(00\bar{1})$ |

Символ куба будет, следовательно, {100}. Три символа первой строки представляют собою все возможные перестановки из единицы с двумя нулями. Символы II строки дают грани, параллельные граням, символы которых помещены в I строке. В этом случае, как это вполне очевидно, меняя знак индекса символа и оставляя тот же порядок индексов, мы можем получить всего только один новый символ, так как в каждом символе имеется только один индекс, знак которого мы можем переменить, а именно единица. Если бы у нас было в символе два индекса, которые могли бы иметь различные знаки, то мы имели бы следующие возможности:

$$(p_1 p_2 0),\ (\bar{p}_1 \bar{p}_2 0),\ (\bar{p}_1 p_2 0) \text{ и } (p_1 \bar{p}_2 0),$$

т. е. получили бы всего четыре различных символа из одного, сохраняя порядок индексов, но меняя знаки.

Ромбический додекаэдр имеет символ {110}. Число перестановок, которые мы можем сделать из двух единиц и одного нуля, будет 3, а именно:

$$(110); \quad (101); \quad (011).$$

Перемена знаков в каждом из таких символов дает увеличение их количества в 4 раза. Таким образом, мы получаем всего 12 возможных символов, а именно:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (110) | $(\bar{1}\bar{1}0)$ | $(\bar{1}10)$ | $(1\bar{1}0)$ |
| (101) | $(\bar{1}0\bar{1})$ | $(\bar{1}01)$ | $(10\bar{1})$ |
| (011) | $(0\bar{1}\bar{1})$ | $(0\bar{1}1)$ | $(01\bar{1})$ |

Для индексов символа $(p_1 p_2 0)$ мы будем иметь всего 6 возможных перестановок, а именно:

$$(p_1 p_2 0),\ (p_1 0 p_2),\ (0 p_1 p_2),\ (p_2 p_1 0),\ (p_2 0 p_1),\ (0 p_2 p_1).$$

Из каждого такого символа мы можем образовать еще три новых, путем перемены знаков. Таким образом, получаем всего 18 новых символов, а с основными, имеющими только положительные знаки, получаем общее число в 24 символа. Простые формы, отмечающиеся такими символами, будут иметь в кубически-изотропном комплексе также 24 грани — это будут пирамидальные гексаэдры.

Если мы возьмем символ, состоящий из двух одинаковых индексов, и не содержащий нулей, а именно: $\{p_1 p_1 p_2\}$, то мы можем составить всего три основных символа:

$$(p_1 p_1 p_2),\ (p_1 p_2 p_1) \text{ и } (p_2 p_1 p_1).$$

При перемене знаков индексов, количество символов в этом случае, как мы уже видели при рассмотрении символов граней октаэдра, увеличится в 8 раз. Таким образом, мы будем иметь всего 24 символа и число граней в простой форме будет также 24. Простые формы для этого случая, в кубически-изотропном комплексе, будут:

1) Пирамидальный октаэдр, если $p_2 < p_1$ и
2) Триоктаэдр, если $p_2 > p_1$.

Рассмотрим также последний случай, когда все три индекса символа будут различны и не будут равны нулю. В этом случае символ формы имеет вид $\{p_1 p_2 p_3\}$. При таком условии количество возможных перестановок будет 6, а перемена знаков увеличит общее количество выведенных символов в 8 раз. Получается простая форма, состоящая из 48 граней, а именно дитриоктаэдр.

Символы граней дитриоктаэдра будут следующие:

$$(p_1 p_2 p_3)(\bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3)(\bar{p}_1 p_2 p_3)(p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3)(p_1 \bar{p}_2 p_3)(\bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3)(p_1 p_2 \bar{p}_3)(\bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3)$$
$$(p_1 p_3 p_2)(\bar{p}_1 \bar{p}_3 \bar{p}_2)(\bar{p}_1 p_3 p_2)(p_1 \bar{p}_3 \bar{p}_2)(p_1 \bar{p}_3 p_2)(\bar{p}_1 p_3 \bar{p}_2)(p_1 p_3 \bar{p}_2)(\bar{p}_1 \bar{p}_3 p_2)$$
$$(p_3 p_1 p_2)(\bar{p}_3 \bar{p}_1 \bar{p}_2)(\bar{p}_3 p_1 p_2)(p_3 \bar{p}_1 \bar{p}_2)(p_3 \bar{p}_1 p_2)(\bar{p}_3 p_1 \bar{p}_2)(p_3 p_1 \bar{p}_2)(\bar{p}_3 \bar{p}_1 p_2)$$
$$(p_3 p_2 p_1)(\bar{p}_3 \bar{p}_2 \bar{p}_1)(\bar{p}_3 p_2 p_1)(p_3 \bar{p}_2 \bar{p}_1)(p_3 \bar{p}_2 p_1)(\bar{p}_3 p_2 \bar{p}_1)(p_3 p_1 \bar{p}_2)(\bar{p}_3 \bar{p}_2 p_1)$$
$$(p_2 p_1 p_3)(\bar{p}_2 \bar{p}_1 \bar{p}_3)(\bar{p}_2 p_1 p_3)(p_2 \bar{p}_1 \bar{p}_3)(p_2 \bar{p}_1 p_3)(\bar{p}_2 p_1 \bar{p}_3)(p_2 p_1 \bar{p}_3)(\bar{p}_2 \bar{p}_1 p_3)$$
$$(p_2 p_3 p_1)(\bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_1)(\bar{p}_2 p_3 p_1)(p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_1)(p_2 \bar{p}_3 p_1)(\bar{p}_2 p_3 \bar{p}_1)(p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_1)(\bar{p}_2 \bar{p}_3 p_1)$$

Таким образом, мы видим, что количество граней, в простой форме кубически-изотропного комплекса, будет одина-

ково с количеством изменений, которые возможно произвести для символа данной формы путем перемены знаков индексов и их порядка.

С точки зрения ретикулярной теории строения, каждая грань простой формы будет представлять собою плоскую сетку, причем эта сетка для всех граней одной и той же простой формы характеризуется одинаковым расположением гомологических точек и одинаковым элементарным параллелограммом. В то же время, символы граней простой формы всегда, как мы видим, будут различаться только порядком и знаками индексов, причем абсолютные величины индексов для всех символов будут одинаковы.

Из всего только что изложенного, мы можем вывести общее правило для нахождения количества граней в простой общей форме дитриоктаэдрического вида симметрии гексаэдрической сингонии по символу данной грани этой формы.

Определяем число перестановок, которые можно составить из трех индексов данного символа. Полученное число умножаем на $8 = 2^3$, если ни один из индексов символа не равен нулю, и получаем количество граней в простой общей форме данного символа. Если один из индексов — нуль, то число найденных перестановок умножаем на $4 = 2^2$; если же, наконец, два индекса — нули, умножаем найденное число на $2 = 2^1$.

## 9. ГЕКСАГОНАЛЬНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ КОМПЛЕКС.

Кроме изотропного комплекса гексаэдрической сингонии существует еще изотропный комплекс гексагональной гипосингонии. Этот комплекс характеризуется элементарным параллелепипедом пространственной решетки, имеющим вид комбинации ромбической призмы и пинакоида, причем грань пинакоида имеет вид ромба с углами в $60^0$ и $120^0$. Все ребра такой комбинации равны между собой, причем грани ромбической призмы перпендикулярны граням пинакоида.

В основе строения кристаллов, обладающих такой пространственной решеткой, лежит тетрапараллелоэдр, представляющий собою комбинацию гексагональной призмы и пинакоида. Мы можем очень легко определить отношения между

длинами ребер, образующих стороны граней гексагональной призмы, из рассмотрения пространственной решетки указанного вида. Положим (рис. 160), плоскость чертежа представляет собою плоскую сетку пространственной решетки для грани пинакоида изотропного комплекса гексагональной гипосингонии, причем, на чертеже, точками $a$ отмечены центры параллелоэдров, сечение которых плоской сеткой изображено в виде правильных шестиугольников. В пространственной решетке

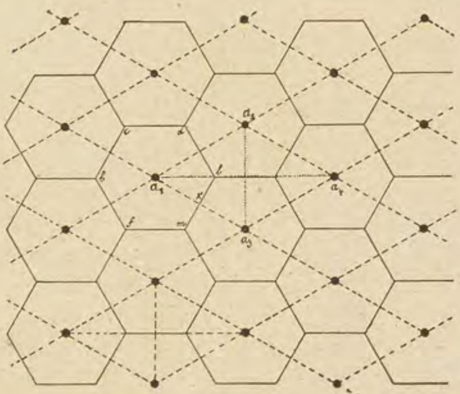


Рис. 160.

гексагонального изотропного комплекса расстояние между точкой $a_1$ плоской сетки, изображенной на чертеже, и точкой $a_1'$ параллельной ей ближайшей плоской сетки, лежащей выше плоскости чертежа по направлению $a_1 a_1'$ перпендикулярному плоскости чертежа, будет: $a_1 a_1' = a_1 a_2 = a_2 a_3$.

Так как треугольник $a_1 a_2 a_3$ будет правильным, то, приняв $a_1 a_3 = 1$ и заметив, что $a_1 k = k a_3 = \frac{1}{2}$ и $\angle l a_1 k = 30^0$, определяем из прямоугольного треугольника $a_1 k l$:

$$kl = a_1 k \cdot tg\, 30^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как $ml = 2kl$, то мы имеем:

$$ml = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Мы приняли высоту параллелоэдра равной 1, а потому отношение длин неравных сторон четыреугольной грани гексагональной призмы в параллелоэдре изотропного комплекса гексагональной сингонии будет выражаться таким образом:

$$\frac{a_1\, a_1'}{m\, l} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Теперь докажем, что кристаллический комплекс, в основе строения которого лежит такой тетрапараллелоэдр, будет изотропным. Для такого доказательства необходимо только убедиться, что для каждого возможного ребра в таком комплексе существует возможная перпендикулярная грань. Положим (рис. 159), $Oa$, $Ob$ и $Oc$ — три кристаллографические оси, причем $\angle(Oa : Ob) = 60^0$, и $Oc$ — перпендикулярна плоскости первой и второй кристаллографической оси. Пусть единичные отрезки, по всем трем осям, равны между собой. Возьмем какое-нибудь ребро $Od$ символа $[s_1 s_2 s_3]$ и проведем через некоторую точку $d$ этого ребра плоскости, параллельные плоскостям кристаллографических осей. В результате такого построения получим параллелепипед $Oa_1 a_4 a_3 d a_2$, ребра которого будут пропорциональны индексам символа данного ребра, а именно: $Oa_1 = ks_1$; $Oa_2 = ks_2$ и $Oa_3 = ks_3$. Проведем через $Od$ и каждую кристаллографическую ось плоскость. Эти плоскости пересекутся с передней, одной из боковых и верхней гранями параллелепипеда по прямым $da_1$, $da_2$ и $da_3$. Заметим, что $Oc \perp aOb$ по условию, а следовательно и $da_3 \perp Oc$, как линия, лежащая в плоскости, перпендикулярной направлению $Oc$. Проведем через точку $d$ ребра $[s_1 s_2 s_3]$ плоскость $abc$, перпендикулярную данному ребру $Od$. Эта плоскость пересечется с тремя построенными плоскостями по линиям $da$, $db$ и $dc$, причем, в виду перпендикулярности плоскости $abc$ к ребру $Od$, мы будем иметь:

$$dc \perp Od; \quad db \perp Od \quad \text{и} \quad da \perp Od.$$

Принимая во внимание, что

$$da_3 = Oa_4 = \sqrt{(Oa_1)^2 + (Oa_2)^2 - 2\,(Oa_1)\cdot(Oa_2)\cos 120^0},$$

находим:

$$da_3 = k\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_1 s_2}.$$

Кроме того, мы имеем из прямоугольного треугольника $Odc$:

$$(da_3)^2 = Oa_3 \cdot ca_3.$$

Заменив $da_3$ и $Oa_3$ только что найденными их выражениями через индексы символа ребра $[s_1 s_2 s_3]$, получаем:

$$ca_3 = \frac{s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_1 s_2}{s_3}.$$

Откуда, приняв во внимание, что $Oc = oa_3 + ca_3$, находим:

$$Oc = \frac{s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2 + s_1 s_2}{s_3}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника $Oa_3 d$ получаем:

$$Od = \sqrt{(da_3)^2 + (Oa_3)^2} = k \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1 s_2}.$$

Из прямоугольного треугольника $da_4 a_2$ имеем:

$$d a_2 = \sqrt{(da_4)^2 + (a_2 a_4)^2} = \sqrt{(Oa_1)^2 + (Oa_3)^2} = k\sqrt{s_1^2 + s_3^2}.$$

Точно также, из прямоугольного треугольника $da_4 a_1$, получаем: $da_1 = k\sqrt{s_2^2 + s_3^2}$. Приняв $\angle dOb = \alpha$, находим из треугольника $Oa_2 d$:

$$\cos\alpha = \frac{(Od)^2 + (Oa_2)^2 - (da_2)^2}{2\,Od \cdot Oa_2} = \frac{s_1 + 2s_2}{2\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1 s_2}}.$$

Из прямоугольного треугольника $Odb$ имеем:

$$Ob = \frac{Od}{\cos\alpha} = \frac{2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1 s_2)}{s_1 + 2s_2}. \qquad (2)$$

Совершенно аналогично получаем:

$$Oa = \frac{2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1 s_2)}{s_2 + 2s_1}. \qquad (3)$$

Мы можем рассматривать отрезки $Oa$, $Ob$ и $Oc$, отсекаемые плоскостью $abc$, как величины, пропорциональные параметрам этой плоскости. Как мы знаем, для того, чтобы данная плоскость $abc$ была возможной гранью кристаллического комплекса, необходимо, чтобы эти отрезки, согласно закону Гаюи, относились друг к другу, как целые рациональные числа. Взяв отношение выражений (1), (2) и (3) получаем:

$$Oa : Ob : Oc = \frac{1}{s_2 + 2s_1} : \frac{1}{s_1 + 2s_2} : \frac{1}{2s_3},$$

откуда, умножая вторую часть равенства на

$$2(s_2+2s_1)(s_1+2s_2)s_3,$$

получаем:

$$Oa:Ob:Oc=2(s_1+2s_2)s_3:2(s_2+2s_1)s_3:(s_2+2s_1)(s_1+2s_2)$$

Это последнее выражение представляет собою, уже несомненно, отношение трех целых рациональных чисел. В виду этого, отрезки $Oa$, $Ob$ и $Oc$ могут быть рассматриваемы, как величины, пропорциональные параметрам некоторой возможной грани, символа $(p_1p_2p_3)$, причем мы можем составить следующие выражения: $Oa=\frac{n}{p_1}$; $Ob=\frac{n}{p_2}$ и $Oc=\frac{n}{p_3}$, где $n$ — некоторый коэффициент пропорциональности. Таким образом, получаем:

$$Oa:Ob:Oc=\frac{1}{s_2+2s_1}:\frac{1}{s_1+2s_2}:\frac{1}{2s_3}=\frac{1}{p_1}:\frac{1}{p_2}:\frac{1}{p_3},$$

откуда

$$p_1:p_2:p_3=(2s_1+s_2):(2s_2+s_1):2s_3 \qquad (4)$$

и обратно:

$$s_1:s_2:s_3=2(2p_1-p_2):2(2p_2-p_1):3p_3 \qquad (5)$$

Эти выражения дают связь между индексами символа грани и перпендикулярного к ней ребра в изотропном комплексе гексагональной гипосингонии, если мы будем определять символы, взяв три указанные выше кристаллографические оси.

Если нам даны индексы символа ребра $[s_1s_2s_3]$, то мы можем определить символ перпендикулярной к нему грани, пользуясь выражением (4). На основании выражения (5) мы можем найти символ ребра, перпендикулярного к грани $(p_1p_2p_3)$. Таким образом, если мы возьмем грань символа (111), то перпендикулярное к ней возможное ребро будет иметь символ [223], и наоборот, для грани (332) найдем перпендикулярное ребро [111]. Как мы видим, при такой системе обозначений граней и ребер, символы данной грани и перпендикулярного к ней ребра будут различными.

## 10. СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ И РЕБЕР В ГЕКСАГОНАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ КОМПЛЕКСЕ.

При определении символов элементов кристаллического многогранника мы можем взять за основу: или определение символа ребра и в зависимости от такого определения поставить нахождение символа грани, или наоборот, считать символ грани, как основу для определения значения символа ребра. Другими словами, мы можем заранее определить значение символа грани, так сказать, определить его реальный смысл и установить затем некоторую связь между символом грани и символом ребра, имеющего определенное положение относительно грани данного символа.

Для получения символа данной грани гексагонально-изотропного комплекса мы взяли определенные кристаллографические оси и приняли на них равные единичные отрезки. Приняв эти оси, как данные для определения символа грани, мы можем сказать, что грань, отсекающая на первой кристаллографической оси отрезок, равный $a$ единицам, на второй $b$ единицам и на третьей $c$ единицам, будет иметь символ: $\frac{k}{a} : \frac{k}{b} : \frac{k}{c} = (p_1 \, p_2 \, p_3)$. Если мы поставим определенное условие для значения символа ребра, перпендикулярного данной грани, то мы можем получить совершенно определенный символ такого ребра, вне зависимости от реального значения такого символа. Примем как условие, чтобы символ грани и перпендикулярного к ней ребра в гексагонально-изотропном комплексе были бы одинаковы. Как мы видели в предыдущем параграфе, для гексагонально-изотропного комплекса, символ грани $(p_1 \, p_2 \, p_3)$ и перпендикулярного к ней ребра $[s_1 \, s_3 \, s_3]$, найденные по изложенному в § 9 способу, не удовлетворяют такому условию, так как $p_1 : p_2 : p_3 \neq s_1 : s_2 : s_3$. В виду этого, $s_1$, $s_2$ и $s_3$ уже не будут индексами символа ребра, а так называемыми субиндексами этого символа. Для символа ребра $[r_1 \, r_2 \, r_3]$, полученного при соблюдении поставленного нами условия, мы получаем те же соотношения между символом грани и символом перпендикулярного к ней ребра, которые были выве-

дены для кубически-изотропного комплекса, а именно:

$$p_1 : p_2 : p_3 = r_1 : r_2 : r_3 \qquad (6)$$

Для соблюдения такого условия нам необходимо изменить символ ребра, перпендикулярного данной грани, а вследствие такого изменения, уже не будет удовлетворяться уравнение: $p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = O$, выведенное как соотношение между индексами символа грани и индексами символа одного из ребер, находящегося в этой грани. Вместо этого уравнения мы будем иметь соотношение, выражающееся уравнением: $p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 = O$, так как теперь роль индексов символа ребра будут играть субиндексы того же символа.

Для того, чтобы получить уравнения, выражающие связь между $(p_1 p_2 p_3)$ и $[r_1 r_2 r_3]$, мы должны будем воспользоваться равенствами (4) § 9 и (6), из которых получаем:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (2s_1 + s_2) : (2s_2 + s_1) : 2s_3 \qquad (7)$$

Из этого последнего выражения находим:

$$s_1 : s_2 : s_3 = 2(2r_1 - r_2) : 2(2r_2 - r_1) : 3r_3 \qquad (7')$$

При вышеизложенных рассуждениях, мы приняли угол между положительными концами горизонтальных кристаллографических осей в $60^0$. Но мы могли бы принять угол между положительными концами тех же осей за $120^0$, т. е. просто переменить положительное значение конца одной оси на отрицательное и обратно. При такой перемене знаков одной из горизонтальных осей, мы получим для уравнений (7) и (7′) следующие значения:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (2s_1 - s_2) : (2s_2 - s_1) : 2s_3 \qquad (7_1)$$

$$s_1 : s_2 : s_3 = 2(2r_1 + r_2) : 2(r_1 + 2r_2) : 3r_3 \qquad (7'_1)$$

Подставив соответственные величины из выражения (7′) в уравнение:

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 = O,$$

находим: $p_1(4r_1 - 2r_2) + p_2(4r_2 + 2r_1) + p_3 3r_3 = O$

или $4p_1 r_1 - 2r_1 p_2 + 4p_2 r_2 - 2p_1 r_2 + 3p_3 r_3 = O$

или, наконец:

$$4(p_1 r_1 + p_2 r_2) - 2(p_1 r_2 + p_2 r_1) + 3p_3 r_3 = O. \qquad (8)$$

Это будет уравнение, устанавливающее связь между символом грани и символом ребра, лежащего в этой грани, при соблюдении условия равнозначности символов грани и перпендикулярного к ней ребра в гексагонально-изотропном комплексе. При существовании такого условия, числа $s$ называются субиндексами а $r$ индексами символа ребра. Точно также мы можем получить субиндексы $t$ и индексы $p$ символа грани. Для определения связи между субиндексами и индексами символа грани, возьмем два уравнения, связывающие индексы $r$ и $r'$ символов двух ребер с индексами $p$ символа грани, проходящей через эти два ребра. Эти уравнения будут:

$$3p_0r_0 + 4p_1r_1 + 4p_2r_2 - 2p_1r_2 - 2p_2r_2 = O \qquad (9)$$

и

$$3p_0r_0' + 4p_1r_1' + 4p_2r_2' - 2p_1r_2' - 2p_2r_1' = O \qquad (10)$$

Выражения (9) и (10) вполне аналогичны уравнению (8), причем только изменена цифра при индексах $r_3$, т. е. эти индексы представлены в виде $r_0$.

Умножив уравнение (9) на $r_1'$, а уравнение (10) на $r_1$, и вычтя из первого произведения второе, получим:

$$\frac{3p_0}{4p_2 - 2p_1} = \frac{r_1r_2' - r_2r_1'}{r_0r_1' - r_0'r_1} \qquad (11)$$

Умножив уравнение (9) на $r_0'$, а уравнение (10) на $r_0$ и вычтя из первого произведения второе, получаем:

$$\frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2} = \frac{r_0r_1' - r_0'r_1}{r_2r_0' - r_0r_2'} \qquad (12)$$

Кроме того, субиндексы $t$ данной грани символа $(p_0p_1p_2)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$t_0r_0 + t_1r_1 + t_2r_2 = O \text{ и } t_0r_0' + t_1r_1' + t_2r_2' = O.$$

Решая эти уравнения относительно $t$ в целых рациональных числах, получаем:

$$t_0 : t_1 : t_2 = (r_1r_2' - r_2r_1') : (r_2r_0' - r_2'r_0) : (r_0r_1' - r_1r_0') \qquad (13)$$

Заменив в уравнениях (11) и (12) индексы их значениями из уравнения (13), находим:

$$t_0 : t_1 : t_2 = 3p_0 : (4p_1 - 2p_2) : (4p_2 - 2p_1) \qquad (14)$$

Уравнение (14) дает связь между индексами символа грани и субиндексами символа ребра, находящегося в этой грани. Принимая в уравнении (14) за неизвестные $p_0 p_1 p_2$, получаем:

$$p_0 : p_1 : p_2 = 2t_0 : (2t_1 + t_2) : (2t_2 + t_1) \qquad (15)$$

Принимая угол между 2-й и 3-й кристаллографическими осями равным $120^0$, получаем:

$$p_0 : p_1 : p_2 = 2t_0 : (2t_1 - t_2) : (2t_2 - t_1) \qquad (15')$$

$$t_0 : t_1 : t_2 = 3p_0 : 2(2p_1 - p_2) : 2(p_1 + 2p_2) \qquad (14')$$

Примем в уравнении (7):

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 1 : 1$$

В таком случае: $s_1 : s_2 : s_3 = 2 : 2 : 3$

Из этого отношения заключаем, что единичные отрезки по кристаллографическим осям, для получения символа ребра, удовлетворяющего поставленному условию, будут отличаться от единичных отрезков по осям, принятых для получения параметров грани и вывода ее символа; а именно, для получения символа ребра мы должны взять по первой и второй кристаллографическим осям вдвое, а по третьей втрое больший единичный отрезок, сравнительно с единичными отрезками, взятыми нами для получения символа грани. Таким образом, различие в кристаллографических осях, для нахождения символа грани и символа ребра, будет выражаться в том, что основной элементарный параллелепипед пространственной решетки гексагонально-изотропного комплекса будет служить основным параллелепипедом только для получения символов граней.

Для нахождения символов ребер, мы должны будем принять за основной параллелепипед с единичными отрезками по кристаллографическим осям некоторый параллелепипед, состоящий из 12 элементарных параллелепипедов решетки. Эти параллелепипеды будут расположены таким образом, что всякая плоскость, проведенная перпендикулярно к третьей кристаллографической оси, и проходящая через центр одного из элементарных параллелепипедов, входящих в состав параллелепипеда, основного для ребер, пересечет всего 4 элемен-

тарных параллелепипеда, а плоскость, перпендикулярная первой или второй кристаллографической оси, и проведенная через центр одного из 12 элементарных параллелепипедов, пересечет 3 таких параллелепипеда.

## 11. СИМВОЛЫ, УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ГРАНЕЙ И РЕБЕР ГИПОГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

Мы видели, при исследовании свойств символов граней и ребер кубически-изотропного комплекса, что всевозможные комбинации из индексов данного символа будут служить для обозначения граней одной и той же простой формы в высшем виде симметрии гексаэдрической сингонии. Точно также и направления одинакового значения получают совершенно аналогичные выражения. Если бы мы захотели иметь такие же свойства и для символов гексагонально-изотропного комплекса, то мы легко убедились бы, что этого достигнуть невозможно, приняв какие угодно три кристаллографические оси. Однако, возможно получить символы с совершенно аналогичными свойствами, если только принять для вывода этих символов не 3, а четыре кристаллографические оси.

В виду этого, при обозначении символами элементов кристаллов гипогексагонального типа, употребляются четыре кристаллографические оси, причем три из этих осей лежат в одной плоскости. Так как для точного определения положения какой угодно точки в пространстве трех измерений достаточно иметь всего три постоянных направления, то четвертая ось является, в сущности, излишней. Введение этой четвертой оси обьясняется тем, что обозначение граней и ребер кристаллов гексагональной гипосингонии, при помощи символов с тремя индексами, не дает возможности отметить равные направления символами, отличающимися друг от друга только порядком и знаком индексов. Для получения такой возможности необходимо ввести четвертую вспомогательную кристаллографическую ось. Такая система обозначений была впервые предложена в 1820 году Chr. S. Weiss'ом и введена во всеобщее употребление в 1851 г. Bravais.

Для кристаллов гексагональной гипосингонии за кристаллографические оси принимаются: $L^6$ или $L^3$ и три равных направления, лежащие в плоскости, перпендикулярной к этим осям симметрии и образующие между ближайшими концами углы в $60^0$. Что касается порядка кристаллографических осей, то в настоящее время этот порядок принимается или по предложению Bravais, или по системе П. Грота, или, наконец, по системе Е. Федорова.

По системе Bravais, за положительные направления первой, второй и третьей кристаллографических осей принимаются концы равных направлений, образующие между собой углы в $120^0$. $L^6$ или $L^3$ принимается за 4-ую кристаллографическую ось, причем положительным считается направление снизу вверх от начала осей.

По Гроту, за положительные направления первой, второй и третьей оси принимаются три ближайшие друг к другу концы равных направлений, образующие между собой углы в $60^0$. 4-ая кристаллографическая ось совпадает с $L^6$ или $L^3$.

По Федорову, за первую ось принимается $L^6$ или $L^3$, а за вторую, третью и четвертую три равных направления, перпендикулярных к $L^6$ или $L^3$. Положительные концы 2-й, 3-й и 4-ой кристаллографических осей образуют между собой углы в $60^0$. В дальнейшем изложении мы будем, вообще, придерживаться системы Федорова.

## 12. СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ ГИПОГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

За символ грани кристалла гексагональной гипосингонии, аналогично с символом грани кристалла кубического типа, мы принимаем отношение четырех чисел, обратно пропорциональных длинам отрезков по кристаллографическим осям, отсекаемых данной гранью и измеренных в осевых единицах. Единичные отрезки по кристаллографическим осям, в кристаллических комплексах гексагональной гипосингонии, будут равны друг другу на всех трех осях, лежащих в одной плоскости. Единичный отрезок по оси, перпендикулярной к равным между собой кристаллографическим осям,

будет, вообще говоря, отличаться от отрезков по равным осям, а потому для определения символа грани необходимо знать, между прочим, отношение единичного отрезка по первой оси к единичному отрезку по одной из равных осей.

Для определения положения плоскости в пространстве совершенно достаточно трех осей координат. В виду этого, введение четвертой оси вызывает некоторое взаимоотношение между тремя независимыми друг от друга осями и введенной дополнительной осью. Это взаимоотношение может быть выражено определенным образом, в зависимости от положения дополнительной оси относительно трех других осей.

Так как три кристаллографические оси, для кристаллов гексагональной гипосингонии, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к направлению первой оси, то мы можем установить вполне определенную связь между отрезками, отсекаемыми гранью по этим трем осям, в то время как отрезок по 4-ой оси остается совершенно независимым от отрезков по другим осям.

Положим, первая кристаллографическая ось, совпадающая с $L^6$ гексагонального кристалла, перпендикулярна к плоскости чертежа (рис. 161), которая, в то же время, служит плоскостью трех кристаллографических осей $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$, причем $Oq_1$, $Oq_2$, $Oq_3$ — положительные отрезки на этих осях. Пусть $MN$ — линия пересечения некоторой грани кристалла с плоскостью чертежа. Отрезки, отсекаемые этой гранью на кристаллографических осях, лежащих в плоскости чертежа, будут $Oq_1 = q_1$, $Oq_2 = q_2$ и $Oq_3 = q_3$. Положим:

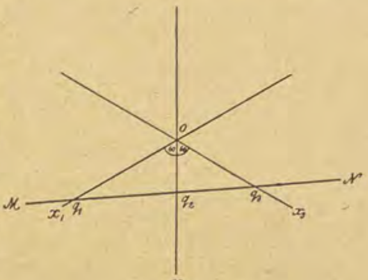


Рис. 161.

$$\angle\, Oq_1q_3 = \beta.$$

Из треугольника $q_1Oq_2$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\beta &= \frac{Oq_2 \cdot \sin x_1 x_2}{Oq_1 - Oq_2 \cos x_1 x_2} = \frac{q_2 \cdot \sin 60^0}{q_1 - q_2 \cdot \cos 60^0} \\ &= \frac{q_2 \sqrt{3}}{2\,(q_1 - \frac{1}{2} q_2)} = \frac{q_2 \sqrt{3}}{2\,q_1 - q_2}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из треугольника $q_1\,Oq_3$ имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Oq_2 \cdot \sin x_1 x_3}{Oq_1 - Oq_3 \cdot \cos x_1 x_3} = \frac{q_3 \cdot \sin 120^0}{q_1 - q_3 \cdot \cos 120^0} = \frac{q_3 \sqrt{3}}{2\,q_1 + q_3} \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{q_2 \sqrt{3}}{2\,q_1 - q_2} = \frac{q_3 \sqrt{3}}{2\,q_1 + q_3},$$

откуда:

$$q_1 q_2 = q_3 (q_1 - q_2) \qquad (3)$$

Индексы символа грани, соответствующие 2-й, 3-й и 4-й кристаллографическим осям, мы можем представить в виде:

$$p_1 = \frac{k}{q_1};\ \ p_2 = \frac{k}{q_2} \ \text{ и } \ p_3 = \frac{k}{q_3}.$$

Вставив эти выражения в уравнение (3), находим:

$$p_3 = p_2 - p_1. \qquad (4)$$

Таким образом, между отрезками по трем равным кристаллографическим осям, в кристаллах гексагональной гипосингонии, существует определенная связь, выражаемая уравнением (3), а между индексами символа — связь, выражаемая уравнением (4).

## 13. СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ ПРОСТЫХ ФОРМ ГЕКСАГОНАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО КОМПЛЕКСА.

Посмотрим теперь, какие символы получают грани данной простой формы в комплексах дигексагонально-дипирамидального вида симметрии гексагональной гипосингонии и, в частности, в гексагонально-изотропном комплексе, если приняты четыре кристаллографические оси. Пинакоид, грани которого перпендикулярны к $L^6$ гексагонально-изотропного комплекса, состоит из двух граней и символы этих граней будут (1000) и ($\bar{1}000$).

Принимая во внимание, что для индексов символов граней $(p_0 p_1 p_2 p_3)$ кристаллов гипогексагонального типа должно существовать отношение $p_2 = p_1 + p_3$, мы можем всякий символ грани представить в виде: $(p_0, p_1, p_1 + p_3, p_3)$, т. е. сумма второго и четвертого индексов символа грани всегда должна быть равна третьему индексу того же символа. Теперь уже перестановки индексов символа делаются возможными только для индексов $p_1$, $p_2$ и $p_3$, так как всякое изменение абсолютной величины $p_0$ будет давать первый индекс символа грани другой формы, в виду того, что ось $L^6$ представляет собою единичное направление.

Таким образом, возможны только перестановки $p_1$, $p_2$ и $p_3$ а для $p_0$ возможна только перемена знака. Однако, такие перестановки трех индексов уже сами по себе обуславливают перемену знака для некоторых индексов. Условимся, чтобы третий индекс всегда был положительным. При этом условии мы будем иметь 6 случаев, если все индексы различны:

$$p_1 \qquad (p_1 + p_3) \qquad p_3 \qquad (1)$$

$$p_3 \qquad (p_1 + p_3) \qquad p_1 \qquad (2)$$

$$\bar{p}_1 \qquad p_3 \qquad (p_1 + p_3) \qquad (3)$$

$$\bar{p}_3 \qquad p_1 \qquad (p_1 + p_3) \qquad (4)$$

$$(p_1 + p_3) \qquad p_3 \qquad \bar{p}_1 \qquad (5)$$

$$(p_1 + p_3) \qquad p_1 \qquad \bar{p}_3 \qquad (6)$$

Переменив знаки во всех этих случаях на обратные, получим еще шесть новых комбинаций индексов. Кроме того, перемена знака у $p_0$ удвоит общее число случаев и всего получится 24 возможных случая. Если два индекса будут одинаковы, т, е. $p_1 = p_3$, то количество возможностей уменьшится вдвое, т. е. будет равно 12, так как из первых шести перечисленных возможных комбинаций сделаются равными первая и вторая, третья и четвертая, а также пятая и шестая. Если один из индексов будет нуль, то остальные два индекса будут непременно равны друг другу и мы опять получим из основных шести случаев только 3, а именно: $0pp$, $pp0$ и $p0\bar{p}$.

Наконец, взяв все три индекса $p_1 p_2 p_3$ равными друг другу, мы найдем, что эти индексы могут быть только нулями, причем возможны будут всего только две комбинации: (1000) и $(\bar{1}000)$.

Для гексагонально-изотропного комплекса количество возможных комбинаций из индексов символа, указанных выше, будет также вполне определять количество граней в простой форме дигексагонально-дипирамидального вида симметрии, а именно:

| | при $p_0 = 0$ | при $p_0 \neq 0$ |
|---|---|---|
| Все индексы $p_1 p_2 p_3$ различны: | 12 комб. дигексагональная призма. | 24 комб. дигексагональная дипирамида. |
| Два индекса из трех равны: | 6 комб. гексагональная призма. | 12 комб. гексагональная дипирамида |
| Один индекс 0; два другие равны. | 6 комб. гексагональная призма. | 12 комб. гексагональная пирамида. |
| $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ | — | 2 комб. пинакоид. |

## 14. СИМВОЛЫ РЕБЕР КОМПЛЕКСОВ ГИПОГЕКСАГОНАЛЬНОГО ТИПА.

Как уже было указано при рассмотрении свойств гексагонально-изотропного комплекса, для определения символа ребра, под условием равнозначности этого символа с символом грани, перпендикулярной данному ребру, необходимо иметь определенное отношение между единичными отрезками по вертикальной $x_0$ и одной из горизонтальных осей, например, по оси $x_1$, а именно $\frac{x_0}{x_1} = \frac{3}{2}$. В виду этого, отношение единичных отрезков по кристаллографическим осям, для определения символов ребер, будет:

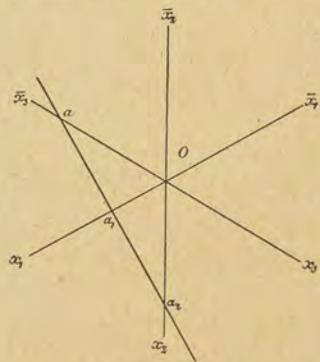
$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 3\,a : 2\,b : 2\,b : 2\,b,$$

где $a:b$ — отношение единичных отрезков по вертикальной и одной из горизонтальных осей, принимаемых для нахождения символа какой-нибудь грани данного кристаллического комплекса гипогексагонального типа.

Сделав такое допущение, мы можем рассматривать символ ребра, как обозначение отношения длин отрезков прямых (векторов), по которым необходимо пройти для того, чтобы, исходя из начала кристаллографических осей, достигнуть некоторой точки данного ребра, при условии постоянного движения параллельно одной из кристаллографических осей. Вообще говоря, для того чтобы иметь возможность дойти до какой-нибудь точки пространственной фигуры, исходя из данной точки и двигаясь параллельно определенным, заранее данным, направлениям, необходимо, в качестве данных направлений, иметь всего три направления, не лежащих в одной плоскости. При этом условии, путь, который необходимо пройти, от исходной до конечной точки, будет вполне определенным и задача будет иметь одно решение. Если же мы прибавим к трем необходимым данным направлениям еще одно дополнительное, то решение задачи делается неопределенным, так как при четырех данных направлениях мы можем дойти до конечной точки различными путями, двигаясь все время параллельно данным направлениям. Таким образом, символ ребра, при четырех кристаллографических осях, был бы совершенно неопределенным, если бы мы не имели выведенного ранее условия для индексов символа, а именно: $p_3 = p_2 - p_1$. При существовании этого условия, задача опять получает одно решение, так как из всех возможных случаев только один будет удовлетворять поставленному условию.

Мы видели, при рассмотрении символов с тремя индексами, что кристаллографические оси получают символы [100], [010] и [001]. Посмотрим теперь, какие символы получат кристаллографические оси в гексагонально-изотропном кристаллическом комплексе. Для определения символов кристаллографических осей, в случае гексагонально-изотропного комплекса, мы можем воспользоваться тем условием, что грань и перпендикулярное к ней ребро в гексагонально-изотропном комплексе должны иметь одинаковые символы.

Положим, плоскость чертежа (рис. 162) изображает плоскость, проходящую через вторую, третью и четвертую кристаллографические оси — $x_1$, $x_2$ и $x_3$, гексагонально-изотропного комплекса, а первая ось $x_0$, перпендикулярная к этой плоскости, пересекается с ней в точке $O$. Пусть грань $a_1 a_2$, перпендикулярная к оси $x_1$, пересекает эту ось в точке $a_1$.


Рис. 162.

Из чертежа ясно, что $a\,O = a_2\,O$. Кроме того, мы имеем:

$$\angle\, \bar{x}_3\,O\,x_1 = \angle\, x_1\,O\,x_2 = 60^0.$$

Из прямоугольных треугольников $a a_1 O$ и $a_2 a_1 O$ находим:

$$a\,O = a_2\,O = a_1\,O \cdot \sec 60^0 = 2\,a_1\,O.$$

В виду этого, символ грани $a a_2$ будет $(021\bar{1})$, а, следовательно, и символ оси $x_1$ будет $[021\bar{1}]$. При помощи точно такого же рассуждения находим для оси $x_2$ символ $[0121]$ и для оси $x_3$ — $[0\bar{1}12]$. Что касается оси $x_0$, то ее символ будет $[1000]$, так как грань, перпендикулярная к этой оси, будет параллельная плоскости осей $x_1 x_2 x_3$.

## 15. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИМВОЛАМИ ГРАНЕЙ И РЕБЕР В КОМПЛЕКСАХ ГИПОГЕКСАГОНАЛЬНОГО ТИПА.

Если мы имеем символ некоторого ребра $[r_0 r_1 r_2 r_3]$, и символ какой-нибудь грани, проходящей через это ребро $(p_0 p_1 p_2 p_3)$, то, принимая последовательно за нуль один из трех последних индексов символа грани и соответственный индекс символа ребра, мы можем вывести, на основании уравнения (8) § 10 следующие выражения:

$$4\,(p_1 r_1 + p_2 r_2) - 2\,(p_1 r_2 + p_2 r_1) + 3\,p_0 r_0 = O$$
$$4\,(p_2 r_2 + p_3 r_3) - 2\,(p_2 r_3 + p_3 r_2) + 3\,p_0 r_0 = O$$
$$4\,(p_1 r_1 + p_3 r_3) + 2\,(p_1 r_3 + p_3 r_1) + 3\,p_0 r_0 = O.$$

Складывая эти три уравнения, получаем:

$$\left.\begin{array}{r} 8(p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3) - 2(p_1r_2 + p_2r_1 - p_1r_3 \\ - p_3r_1 + p_2r_3 + p_3r_2) + 9p_0r_0 = O \end{array}\right\} \quad (1)$$

Принимая во внимание, что $p_3 = p_2 - p_1$, мы легко можем получить на основании этого равенства, сделав соответственные подстановки и сокращения в выражении (1):

$$3p_0r_0 + 2p_1r_1 + 2p_2r_2 + 2p_3r_3 = O. \quad (2)$$

Это будет общее уравнение связи между символом грани и символом лежащего в ней ребра для комплексов гипогексагонального типа. Уравнения (7) § 10 мы можем теперь представить в виде:

$$\left.\begin{array}{l} r_0 : r_1 : r_2 = 2s_0 : (2s_1 + s_2) : (s_1 + 2s_2) \\ r_0 : r_2 : r_3 = 2s_0' : (2s_2' + s_3') : (s_2' + 2s_3') \\ r_0 : r_1 : r_3 = 2s_0'' : (2s_1'' - s_3'') : (2s_3'' - s_1'') \end{array}\right\} \quad (3)$$

откуда:

$$\left.\begin{array}{l} s_0 : s_1 : s_2 = 3r_0 : (4r_1 - 2r_2) : (4r_2 - 2r_1) \\ s_0' : s_2' : s_3' = 3r_0 : (4r_2 - 2r_3) : (4r_3 - 2r_2) \\ s_0'' : s_1'' : s_3'' = 3r_0 : (4r_1 + 2r_3) : (2r_1 + 4r_3) \end{array}\right\} \quad (4)$$

Сложив почленно эти выражения и принимая во внимание, что $r_3 = r_2 - r_1$, находим:

$$(s_0 + s_0' + s_0''):(s_1 + s_1''):(s_2 + s_2''):(s_3' + s_3'') = 3r_0:2r_1:2r_2:2r_3 \quad (5)$$

Если нам даны две грани символов $(p_0p_1p_2p_3)$ и $(q_0q_1q_2q_3)$, то для нахождения субиндексов ребра пересечения этих граней мы будем иметь:

$$s_0 : s_1 : s_2 = \begin{vmatrix} p_1 p_2 \\ q_1 q_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_2 p_0 \\ q_2 q_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_0 p_1 \\ q_0 q_1 \end{vmatrix}$$

$$s_0' : s_2' : s_3' = \begin{vmatrix} p_2 p_3 \\ q_2 q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_3 p_0 \\ q_3 q_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_0 p_2 \\ q_0 q_2 \end{vmatrix}$$

$$s_0'' : s_1'' : s_3'' = \begin{vmatrix} p_1 p_3 \\ q_1 q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_3 p_0 \\ q_3 q_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_0 p_1 \\ q_0 q_1 \end{vmatrix}$$

Заменив в полученном уравнении (5) $s$ через $p$ и $q$, найдем:

$$
\left.
\begin{aligned}
r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = 2 \begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} : -3 \begin{vmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_0 \\ q_2 & q_3 & q_0 \end{vmatrix} \\
: 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ p_3 & p_0 & p_1 \\ q_3 & q_0 & q_1 \end{vmatrix} : -3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{1} \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\right\} \qquad (6)
$$

Таким образом, правая часть уравнения представляет собою отношение миноров детерминанта:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \bar{1} & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}
$$

, разложенного по первой строке.

Уравнение (6) дает общую связь между символами двух, не параллельных между собой, граней и символом ребра их пересечения для всех, вообще, комплексов гипогексагонального типа строения, так как все вышеприведенные соотношения сохранят свое значение и после гомогенных деформаций, которым мы можем подвергнуть гексагонально-изотропный комплекс для вывода из него комплексов других сингоний. Заменив, в уравнении (6), символы граней символами ребер и наоборот, мы можем, по тому же уравнению, определить символ грани, зная символы двух, находящихся в ней, ребер.

В виду того, что субиндексы символа ребра удовлетворяют уравнениям вида:

$$p_0s_0 + p_1s_1 + p_2s_2 = 0,$$

мы заключаем, что для нахождения символа ребра, положение которого относительно кристаллографических осей известно, можно воспользоваться обычным построением, причем мы, каждый раз, для такого построения должны брать три кристаллографические оси, в числе которых обязательно должна быть $x_0$. Взяв три, возможные при таком условии, комбинации из четырех осей по три, мы найдем три группы субиндексов символа ребра:

$$[s_0 s_1 s_2], \quad [s_0' s_2' s_3'] \quad \text{и} \quad [s_0'' s_1'' s_3''].$$

Из этих субиндексов, на основании уравнения (5), получаем индексы символа ребра.

На основании всего вышеизложенного, мы можем вывести общий способ нахождения символа данного ребра гипогексагонального комплекса графическим путем.

Положим, плоскость рис. 163 представляет собою плоскость трех кристаллографических осей $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$ гипогексагонального комплекса. Если дано направление некоторого ребра $MN$, то проводим через начало кристаллографических осей — точку $O$ — линию $RR_1$, параллельную данному направлению ребра $MN$. Возьмем на линии $RR_1$ произвольную точку $a$ и через эту точку проведем прямые, параллельные трем кристаллографическим осям:

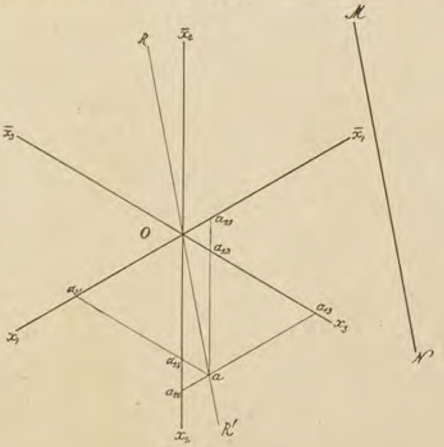


Рис. 163.

$$a_{12}a_{13} \parallel x_1\bar{x}_1, \quad aa_{21} \parallel x_2\bar{x}_2 \quad \text{и} \quad aa_{31} \parallel x_3\bar{x}_3.$$

Каждая из этих трех линий пересечет две кристаллографические оси, и каждая кристаллографическая ось будет иметь две точки пересечения с двумя такими линиями. Ось $x_1\bar{x}_1$ будет пересекаться такими линиями в точках $a_{21}$ и $a_{31}$; ось $x_2\bar{x}_3$ — в точках $a_{12}$ и $a_{32}$ и ось $x_3\bar{x}_3$ — в точках $a_{13}$ и $a_{23}$.

Приняв во внимание знак отрезков, возьмем алгебраические суммы двух отрезков на каждой кристаллографической оси, образуемых проведенными через точку $a$ тремя прямыми. Получаем:

$$\text{по оси } x_1\bar{x}_1: \quad Oa_{31} - Oa_{21} = m$$

$$\text{по оси } x_2\bar{x}_2: \quad Oa_{32} - Oa_{12} = n$$

$$\text{по оси } x_3\bar{x}_3: \quad Oa_{23} - Oa_{13} = q$$

где $m$, $n$ и $q$ некоторые длины, выраженные в определенных

линейных единицах. Если мы имеем отношение $c_1 : c_2 : c_3$ единичных отрезков по кристаллографическим осям $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$, то искомый символ ребра $MN$ будет:

$$\left[0,\ \frac{km}{c_1},\ \frac{kn}{c_2},\ \frac{kq}{c_3}\right],$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности, превращающий отношение: $\frac{m}{c_1} : \frac{n}{c_2} : \frac{q}{c_3}$ в отношение трех целых чисел, не имеющих общих делителей.

Если данное ребро $Oa_1$ (рис. 164) не лежит в плоскости кристаллографических осей $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$, то определение

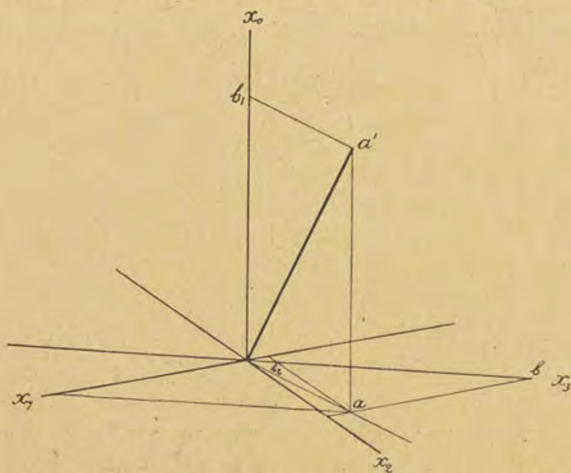



Рис. 164.

его символа мы опять можем свести к только что описанной операции, взяв на данном ребре произвольную точку $a'$ и проведя прямую $a'a$, параллельную оси $Ox_0$, до пересечения этой прямой с плоскостью кристаллографических осей $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$ в точке $a$.

Соединив прямой точки $a$ и $O$, найдем направление некоторого возможного ребра, лежащего в плоскости трех горизон-

тальных кристаллографических осей $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$. Определив символ этого ребра указанным выше способом, находим символ $[0r_1r_2r_3]$. Найденный таким образом символ относится к ребру $Oa$ и три последних индекса этого символа должны быть пропорциональны соответственным индексам символа ребра $Oa'$. Для нахождения символа этого последнего ребра проводим из точки $a'$ прямую $a'b_1 \parallel Oa$ до пересечения этой прямой с осью $Ox_0$. Из точки $a$ проводим две из трех прямых, параллельных осям $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$, например: $ab \parallel Ox_1$, $ab_2 \parallel Ox_2$. Зная отношение $c_0 : c_3$, т. е. отношение единичных отрезков по $Ox_0$ и $Ox_3$, можем получить $\frac{3\,Ob_1}{c_0} : \frac{Ob + Ob_2}{c_3}$. Возьмем некоторый коэффициент пропорциональности $k_1$, умножая на который, мы получим $\frac{3k_1 \cdot Ob_1}{c_0} : \frac{k_1(Ob + Ob_2)}{c_3}$ в виде отношения двух целых рациональных чисел $s : t$, не имеющих общего делителя.

Найдя общее наименьшее кратное $u$ чисел $r_3$ и $t$, и взяв $\frac{u}{r_3} = v$, умножим на полученное целое число $v$ все найденные величины $s$, $r_1$, $r_2$ и $r_3$. Получим символ в виде: $[r_0' r_1' r_2' r_3']$, причем $r_0' = vs$, $r_1' = vr_1$, $r_2' = vr_2$ и $r_3' = vr_3$. Все найденные таким образом индексы символа $[r_0' r_1' r_2' r_3']$ не будут содержать общих делителей.

# VI. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТОК.

## 1. ДВОЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ.

Можно вполне точно и однозначно определить положение какой угодно точки на данной прямой $MN$ (рис. 165), если мы примем за известные и исходные для такого определения две точки $a$ и $b$ на этой прямой. Приняв $a$ и $b$ за постоянные точки, мы можем определить положение каждой точки на той же прямой, по отношению к выбранным нами двум постоянным точкам. Определение относительного положения

какой-нибудь переменной точки $c$ может быть сделано, вообще говоря, различно. Здесь мы рассмотрим то определение положения переменной точки относительно двух постоянных, которое может быть выражено отношением расстояний этой переменной точки от постоянных точек $a$ и $b$.

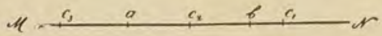


Рис. 165.

Положим, нам дана некоторая переменная точка $c$. Ее положение может быть определено отношением отрезков прямой $\frac{ac}{bc}$. Такое отношение будет иметь знак $+$, если направления от двух постоянных точек $a$ и $b$ к точке $c$ будут одинаковы. То же отношение получит знак минус, если направления от постоянных точек к переменной будут прямо противоположны.

Приняв такие условия для обозначения положения переменной точки относительно двух постоянных $a$ и $b$, мы получим отношение $\frac{ac}{bc}$ в виде положительной величины, если только переменная точка $c$ будет находиться вне отрезка прямой $ab$. Отрицательное значение $\frac{ac}{bc}$ получится в том случае, если переменная точка $c$ будет находиться между точками $a$ и $b$. Если переменная точка $c$ совпадет с точкой $a$, то отношение $\frac{ac}{bc}$ будет равно нулю; в случае, если $c$ совпадает с точкой $b$, то то же отношение будет равно $\infty$.

Если переменная точка $c_1$ находится вне отрезка $ab$ и ближе к точке $b$, то отношение $\frac{ac_1}{bc_1}$ будет больше положительной единицы. С другой стороны, если переменная точка займет положение точки $c_3$, находящейся вне отрезка $ab$ и расположенной ближе к точке $a$, чем к точке $b$, то отношение $\frac{ac_3}{bc_3}$ будет меньше положительной единицы, т. е., вообще говоря, будет дробью. Если, наконец, переменная точка $c$ примет положение точки $c_2$, находящейся как раз

посередине между точками $a$ и $b$, то отношение $\frac{ac_2}{bc_2}$ будет отрицательным, а в виду равенства $ac_2 = bc_2$, оно будет равно $-1$. Если переменная точка $c$ удалится в бесконечность, то отношение $\frac{ac}{bc}$ будет равняться $+1$.

Пусть, кроме двух постоянных точек $a$ и $b$ на прямой $MN$ нам даны еще две переменные точки $c$ и $d$. В этом случае относительное положение этих переменных точек мы можем определить уже отношением отношений $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ или двойным отношением. Очевидно, такое двойное отношение может иметь различные значения, т. е. может быть выражено тем или другим положительным или отрицательным числом и, в частном случае, оно может оказаться равным $-1$. В этом последнем случае такое двойное отношение называется гармоническим. Итак, двойное отношение:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1$$

называется гармоническим, а все другие отношения называются ангармоническими. Гармоническое отношение мы можем представить в виде:

$$ac \cdot bd = -ad \cdot bc.$$

Можно доказать следующую теорему:

Если нам даны какие-нибудь три точки $a$, $b$ и $c$ на прямой $MN$ (рис. 166), то мы всегда можем найти четвертую гармоническую точку $d$ на той же прямой.

Для нахождения четвертой гармонической необходимо принять за переменную точку ту из трех данных, которая находится между двумя другими данными точками, а эти последние принять за постоянные точки. Необходимость такого допущения непосредственно вытекает из того, что двойное отношение должно равняться $-1$. Между тем, двойное отношение может быть отрицательным только в том случае, если одно из отношений отрицательно. Из предыдущего мы знаем, что для получения отрицательного отношения необходимо, чтобы переменная точка $c$ лежала между постоян-

ными точками $a$ и $b$. Посмотрим теперь, каким образом мы можем найти четвертую гармоническую, если даны три точки на прямой.

Положим, на прямой $MN$ (рис. 166) нам даны три точки: $a$, $b$ и $c$, причем точки $a$ и $b$ лежат на концах отрезка прямой $MN$, определяемого данными тремя точками. Приняв $a$ и $b$ за постоянные, а $c$ за переменную точку, проводим через постоянные точки $a$ и $b$ окружность $anbn_1$, для которой $ab$ будет служить диаметром. Через точку $c$ проводим хорду $nn_1$, перпендикулярную к диаметру $ab$. В точке $n$ пересечения этой хорды с окружностью, проводим касательную $nd$. Точка $d$ пересечения этой касательной с прямой $MN$ и будет четвертой гармонической. В самом деле, проведя прямую $nb$, заметим, что в треугольнике $dcn$ угол $dnc$ делится пополам прямой $nb$, так как $\angle n_1nb$ измеряется половиной дуги $n_1b$, а $\angle bnd$ измеряется половиной дуги $nb$. Дуги $nb$ и $n_1b$ равны между собой в виду того, что

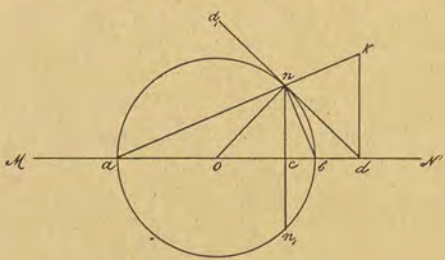


Рис. 166.

$$\angle ncb = \angle n_1cb = \angle nco = \angle n_1co = 90^0.$$

Так как в каждом треугольнике биссектриса угла делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам, то мы имеем:

$$-bc : bd = cn : dn. \quad (1)$$

Знак минус отношению $bc : bd$ мы приписываем на основании предыдущего. Соединим прямой точки $a$ и $n$ и продолжим эту прямую до ее пересечения в точке $k$ с перпендикуляром, восставленным из точки $d$ к линии $MN$. Прямоугольные треугольники $acn$ и $adk$ подобны, так как $nc \parallel dk$. Из подобия этих треугольников мы получаем: $\angle anc = \angle nkd$. Так как угол $anc$ измеряется половиной дуги $an_1$, а угол $knd$, равный $\angle d_1na$ измеряется полови-

ной дуги $an$, равной дуге $an_1$, то $\angle knd = \angle anc$. Таким образом, треугольник $knd$ — равнобедренный и $nd = kd$. Из подобия треугольников $acn$ и $adk$ получаем:

$$ac : ad = cn : dk = cn : dn \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$ac : ad = -bc : bd,$$

откуда

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1,$$

что и требовалось найти.

Если мы имеем на плоскости пучек лучей, пересекающихся в одной точке $O$ (рис. 167), то мы можем принять два из

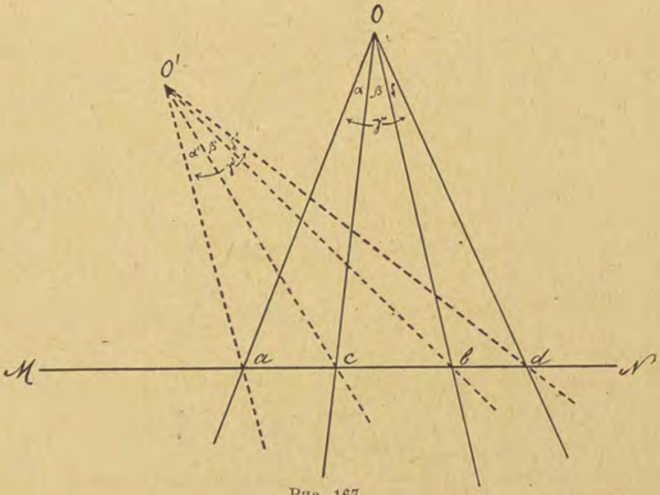



Рис. 167.

таких лучей за постоянные и, вообще, положение каждого луча в пучке определить в виде отношения, аналогичного ранее полученному нами для определения положения переменной точки $c$ на прямой, при постоянных $a$ и $b$. Положение четырех лучей мы также можем определить двойным отношением. Для получения такого отношения пересечем пучек прямых про-

извольной прямой $MN$, не проходящей через точку $O$, причем эта линия пересечет данные четыре луча в точках $a$, $b$, $c$ и $d$. Пусть $\angle aOc = \alpha$, $\angle bOc = \beta$, $\angle aOd = \gamma$ и $\angle bOd = \delta$. Из соответственных треугольников мы получаем по формуле синусов:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{\sin\alpha : \sin(oad)}{\sin\beta : \sin(oba)} \quad \text{и} \quad \frac{ad}{bd} = \frac{\sin\gamma : \sin(oad)}{\sin\delta : \sin(oba)}.$$

Отсюда получаем двойное отношение:

$$-\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}. \tag{3}$$

Так как правая часть уравнения содержит только угловые величины, не зависящие от положения линии $MN$, то двойное отношение:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$$

будет зависеть только от взаимного расположения лучей пучка.

Проведем через точки $a$, $b$, $c$ и $d$ прямой $MN$ четыре луча, пересекающихся в точке $O'$. Из уравнения (3) находим:

$$-\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} : \frac{\sin\gamma'}{\sin\delta'},$$

где

$$\alpha' = \angle aO'c, \quad \beta' = \angle cO'b, \quad \gamma' = \angle aO'd \quad \text{и} \quad \delta' = \angle bO'd.$$

Таким образом:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} : \frac{\sin\gamma'}{\sin\delta'}.$$

Из этого мы заключаем, что двойное отношение синусов углов между четырьмя лучами не изменится, в какой бы точке ни пересекались 4 луча, проходящие через определенные точки $a$, $b$, $c$ и $d$ данной прямой $MN$. В этом случае совершенно безразлично, будут ли лучи, пересекающиеся в точке $O$, лежать в одной плоскости с лучами, пересекающимися в точке $O'$, или не будут. Мы всегда получим одну и ту же величину двойного отношения, если только проведем лучи через те же самые точки прямой $MN$.

Положим теперь, что лучи $Oa$, $Ob$, $Oc$ и $Od$ представляют собою линии пересечения с плоскостью (рис. 167) пучка плоскостей, пересекающихся в одной прямой, перпендикулярной к плоскости рис. 167 и пересекающей эту плоскость в точке $O$. В таком случае, двойное отношение будет представлять собою отношение синусов двугранных углов между плоскостями пучка. Это отношение, на основании уравнения (3), будет таким же, как и для случая четырех лучей. Если мы возьмем (рис. 168) на линии пересечения четырех плоскостей $OO'$ какую-нибудь точку $O'$ и проведем из нее лучи, проходящие через точки $a$, $b$, $c$ и $d$ прямой $MN$, то снова получим ту же самую величину для двойного отношения синусов углов между лучами $O'a$, $O'b$, $O'c$ и $O'd$.

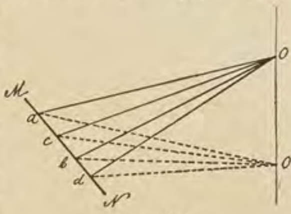


Рис. 168.

Из теории строения кристаллического вещества мы вывели два закона, называемые основными законами геометрической кристаллографии, а именно закон рациональности отношений параметров, или закон Гаюи, и закон зон, или закон Вейсса. Как мы видели, оба эти закона вытекают, как необходимое следствие, из ретикулярной теории строения кристаллического вещества.

Допустим, что пучек лучей, пересекающихся в точке $O$, будет представлять собою возможные ребра кристаллического комплекса, а точки $a$, $b$, $c$ и $d$ прямой — некоторые гомологические точки пространственной решетки. При таком допущении мы можем, на основании закона Гаюи, вывести заключение о рациональности двойных отношений синусов углов между возможными ребрами, а применяя только что изложенные рассуждения о плоскостях и двойных отношениях двугранных углов, придем к выводу о рациональности двойных отношений между синусами двугранных углов, образуемых возможными гранями кристаллического комплекса.

В самом деле, если $MN$ — прямая, проходящая через ряд гомологических точек пространственной решетки, то каждый отрезок $ac$, $bc$, $cd$ и т. д. будет представлять собою некото-

рое целое число промежутков, соответствующих этому ряду, а потому двойное отношение $\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}$ должно быть отношением целых рациональных чисел.

Закон рациональности двойных отношений служит обобщающим аналитическим выводом из законов Гаюи и Вейсса, и является общим математическим выражением этих законов, введенным в кристаллографию Гауссом.

## 2. РАЗВИТИЕ КОМПЛЕКСА.

Для определения кристаллического комплекса, вообще говоря, необходимо иметь в качестве данного некоторый кристаллический сфеноид, другими словами, необходимо и достаточно иметь для полного определения какого угодно кристаллического комплекса, всего 4 грани, расположенные друг относительно друга так, чтобы ребра их взаимного пересечения не были параллельны друг другу.

Если нам дан такой кристаллический сфеноид, то мы можем, рассматривая его с точки зрения теории структуры, сказать, что у нас имеется, в качестве данных, четыре плоских сетки пространственной решетки и 6 рядов гомологических точек, определяемых линиями пересечения этих плоских сеток. С другой стороны, мы видели, что для полного определения пространственной решетки необходимо иметь всего только три направления (ряда гомологических точек) этой решетки, причем относительные длины промежутков рядов должны быть также известны. Для того, чтобы получить возможность определить эти относительные длины промежутков рядов, мы и должны знать положение четвертой плоскости, пересекающей все три данные ряда. Имея кристаллический сфеноид, мы можем принять три из его шести ребер за главные определяющие направления пространственной решетки, т. е. за три сопряженные ряда гомологических точек, и построить на этих рядах параллелепипед, в свою очередь определяющий данную пространственную решетку. Таким образом, для определения всех возможных граней и ребер, достаточно иметь всего 4 грани комплекса, не пере-

секающиеся по три в параллельных ребрах. Эти четыре грани могут или образовать непосредственно кристаллический сфеноид, или четырехгранную пирамиду, если только все они будут пересекаться в одной точке.

Если нам даны четыре грани кристалла, образующие четырехгранную пирамиду $abcod$, (рис. 169) то, продолжив грани $aco$ и $abd$, получим трехгранный угол $a'ado$. Оставив на месте все грани и переместив параллельно самой себе грань $acb$ до тех пор, пока точка $a$ не совпадет с точкой $a'$, получим опять сфеноид $aa'od$, удовлетворяющий всем условиям для полного определения данного кристаллического комплекса.

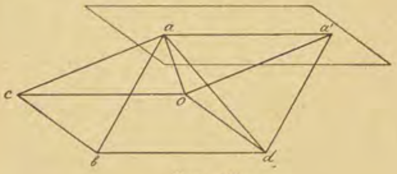



Рис. 169.

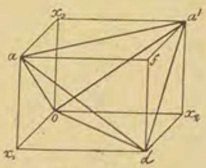



Рис. 170.

Проведем (рис. 170) через ребро $aa'$ данного сфеноида $aa'od$ плоскость $ax_3a'f$, параллельную ребру $od$; через ребро $ad$ проведем плоскость $ax_1df \parallel$ ребру $a'o$; через ребро $oa$ — плоскость $ox_1ax_3 \parallel a'd$ и т. д. В результате такого построения, получим параллелепипед $ax_3a'fdx_2ox_1$. Так как каждая грань кристаллического сфеноида будет представлять собою некоторую плоскую сетку пространственной решетки данного комплекса, то все ребра сфеноида, а также и все ребра построенного вышеуказанным способом параллелепипеда $ax_3a'fdx_2ox_1$, будут определенными рядами гомологических точек пространственной решетки того же кристаллического комплекса.

Если предположить, что ребра построенного параллелепипеда будут тремя сопряженными рядами пространственной решетки, то мы можем три таких ребра $ox_1$, $ox_2$ и $ox_3$ (рис. 170) принять за кристаллографические оси, а отношение расстояний $ox_1 : ox_2 : ox_3$ за отношение единичных отрезков $c_1 : c_2 : c_3$ по таким осям. Сделав такое допу,

щение, мы можем рассматривать построенный параллелепипед, как один из элементарных параллелепипедов пространственной решетки, лежащей в основе строения данного кристаллического вещества. При таком соотношении, мы называем данный сфеноид основным, причем для грани $aa'd$ данного сфеноида получаем символ (111). В самом деле, грань $aa'd$ параллельна диагональной плоскости $x_1x_2x_3$ построенного параллелепипеда, а так как эта плоскость имеет символ (111), то и грань $aa'd$ должна иметь тот же самый символ (111.) Точно так же остальные грани сфеноида получат следующие символы: $aa'o - (\bar{1}\bar{1}1)$, $aod - (1\bar{1}\bar{1})$ и $a'od - (\bar{1}1\bar{1})$. Построив параллелепипед $ax_3a'fdx_2ox_1$, мы будем иметь возможность определять символы какой угодно грани и ребра данного кристаллического комплекса, на основании закона Гаюи, зная отношение:

$$ox_1 : ox_2 : ox_3 = c_1 : c_2 : c_3.$$

В самом деле, всякая возможная грань данного кристаллического комплекса, отсекающая на кристаллографических осях отрезки $a_1$, $a_2$ и $a_3$, должна удовлетворять условию:

$$\frac{c_1}{a_1} : \frac{c_2}{a_2} : \frac{c_3}{a_3} = p_1 : p_2 : p_3,$$

где $p_1$, $p_2$ и $p_3$ — целые рациональные числа, представляющие собою индексы символа данной грани $(p_1 p_2 p_3)$. С другой стороны, имея, в качестве данного, кристаллический сфеноид $aa'od$, мы можем всегда построить любую грань данного кристаллического комплекса.

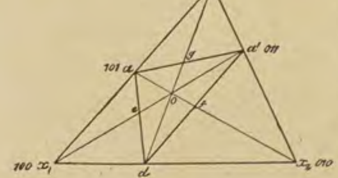


Рис. 171.

Примем плоскость, параллельную грани $aa'd$ основного сфеноида и не проходящую через точку $o$, за плоскость проекций, а точку $o$ за центр пучка. При таком предположении получим линейные проекции (рис. 171) трех ребер сфеноида $oa$, $oa'$ и $od$ в виде точек $a$, $a'$ и $d$, а линейные проекции кристалло-

графических осей в виде точек $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Определяя символы этих ребер, получим те обозначения, которые указаны на рис. 171.

Так как каждые два возможные ребра определяют некоторую возможную грань, то и прямые $aa'$, $ad$ и $a'd$, проходящие через линейные проекции двух ребер, будут представлять собою линейные проекции возможных граней комплекса. Точно так же и линии $x_1x_2$, $x_1x_3$ и $x_2x_3$ будут линейными проекциями граней. Проведем прямые $ax_2$, $a'x_1$ и $dx_3$. Эти прямые также будут линейными проекциями возможных граней, а точка их пересечения $o$ будет линейной проекцией ребра их пересечения. Мы видим из рис. 171, что символ ребра $a$ получается сложением соответственных индексов символов ребер $x_1$ и $x_3$; точно так же символы ребер $a'$ и $d$ получаются путем сложения символов ребер $x_3$ и $x_2$, $x_1$ и $x_2$. Мы также можем получить и символ ребра, представленного в линейной проекции точкой $o$, сложив символы ребер $x_1$ и $a'$ или $x_2$ и $a$, а также $x_3$ и $d$. Кроме того, тот же символ мы можем получить, сложив символы трех ребер $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Во всех этих случаях мы получим один и тот же символ ребра $o$ — [111].

При всех только что изложенных операциях мы должны были пользоваться тем общим свойством каждого кристаллического комплекса, что каждая плоскость, проходящая через два возможных ребра данного комплекса, является его возможной гранью, т. е., другими словами, мы каждый раз применяли закон Вейсса, утверждающий, что каждая грань есть плоскость реберной зоны.

Если бы мы приняли точки $a$, $a'$, $d$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ за гномонические проекции граней соответствующих символов, то линии $ax_2$, $a'x_1$, $dx_3$ представили бы собою гномонические проекции ребер пересечения соответствующих граней, а точка $o$ пересечения этих линий стала бы гномонической проекцией грани (111).

При проведении линий $ax_2$, $a'x_1$, $dx_3$ мы находим, кроме общей точки их пересечения $o$, еще точки $e$, $g$ и $f$ пересечения этих линий с линиями $aa'$, $a'd$ и $ad$. Символы этих точек (рассматриваемых, как линейные проекции возможных

5*

граней) будут: $e$ — (211), $f$ — (121) и $g$ — (112). Эти символы выведутся путем сложения символов точек $a$ и $d$ или $x_1$ и $o$; $a'$ и $d$ или $x_2$ и $o$; $a$ и $a'$ или $x_3$ и $o$. Если точки $a_1 a' \ldots x_3$ мы будем считать гномоническими проекциями граней, то каждую из прямых, проведенных на рис. 171, мы можем рассматривать как геометрическое место гномонических проекций граней, принадлежащих одной и той же зоне.

Таким образом, мы опять возвращаемся к закону Вейсса. В виду возможности указанных выше построений, мы всегда можем, как говорят, развить кристаллический комплекс, т. е. получить проекции какого угодно числа граней данного комплекса, действуя указанным способом.

Имея точки $a$, $a'$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $o$, $e$, $g$, $f$, мы можем продолжать развитие комплекса граней в гномонических проекциях, соединяя прямыми точки $x_2$ и $x_3$ с точкой $e$; $x_1$ и $x_2$ с точкой $g$; $x_1$ и $x_3$ с точкой $f$. Проведя эти прямые, мы найдем гномонические проекции граней того же комплекса в виде точек пересечения вновь проведенных линий с линиями, проведенными ранее. Символы вновь найденных граней будут опять получаться путем сложения символов граней, гномонические проекции которых будут лежать по обе стороны от найденной проекции и в той же зоне.

Такое определение символа грани, проекция которой найдена развитием комплекса, возможно только в том случае, если развитие произведено последовательно, исходя из граней, имеющих такие символы, в которых хотя бы один из индексов был равен нулю, причем, как мы увидим дальше, грани с такими символами непременно будут входить в состав каждой зоны. Такие грани называются исходными для развития зоны, а само развитие называется правильным.

## 3. ЗОНАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ.

Для нахождения исходных граней данного пояса, в случае кристаллических комплексов кубического типа строения, мы должны воспользоваться уравнением:

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0, \qquad (1)$$

где $p$ — индексы символа некоторой грани, принадлежащей определенной зоне, а $r$ — индексы оси данной зоны.

Прежде всего заметим, что из уравнения (1) выводится следующая теорема.

Если две грани $(p_1 p_2 p_3)$ и $(p'_1 p'_2 p'_3)$ принадлежат одному и тому же поясу, ось которого имеет символ $[r_1 r_2 r_3]$, то всякая грань, индексы символа которой могут быть получены суммированием соответственных индексов символов этих двух граней, будет принадлежать к тому же поясу.

В самом деле, если грани $(p_1 p_2 p_3)$ и $(p'_1 p'_2 p'_3)$ принадлежат одному и тому же поясу, ось которого имеет символ $[r_1 r_2 r_3]$, то, на основании уравнения (1), мы, для данного случая, имеем два уравнения:

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$p'_1 r_1 + p'_2 r_2 + p'_3 r_3 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Умножив уравнение (I) на некоторое целое число $m$, а уравнение (II) также на целое число $n$, и сложив полученные уравнения, находим:

$$(mp_1 + np'_1)r_1 + (mp_2 + np'_2)r_2 + (mp_3 + np'_3)r_3 = 0. \qquad \text{(III)}$$

Приняв, в этом последнем уравнении, величины, стоящие в скобках, за индексы символа грани, увидим, что теорема доказана.

Заметим, что какой бы пояс граней кристаллического комплекса мы ни взяли, этот пояс непременно пересечет пояса [100], [010] и [001], которые мы будем называть главными. В общем случае, в состав каждого взятого пояса будут входить три пары возможных граней, имеющих один из индексов символа равным нулю. Вот именно эти-то грани мы и можем принять за исходные для развития данного пояса.

Если данный пояс будет одним из поясов [100], [010] или [001], то все без исключения грани такого пояса будут иметь один из индексов символа равным нулю, а кроме того, в состав такого пояса непременно войдут две из граней (100), (010) и (001). В таком случае, за исходные для развития пояса мы можем взять именно эти последние грани. Символ оси такого пояса будет состоять из единицы с двумя нулями.

Другой возможный случай будет тот, когда данный пояс пересечет два главные пояса в одной грани. В этом случае такая грань может быть только (100), (010) или (001). Кроме

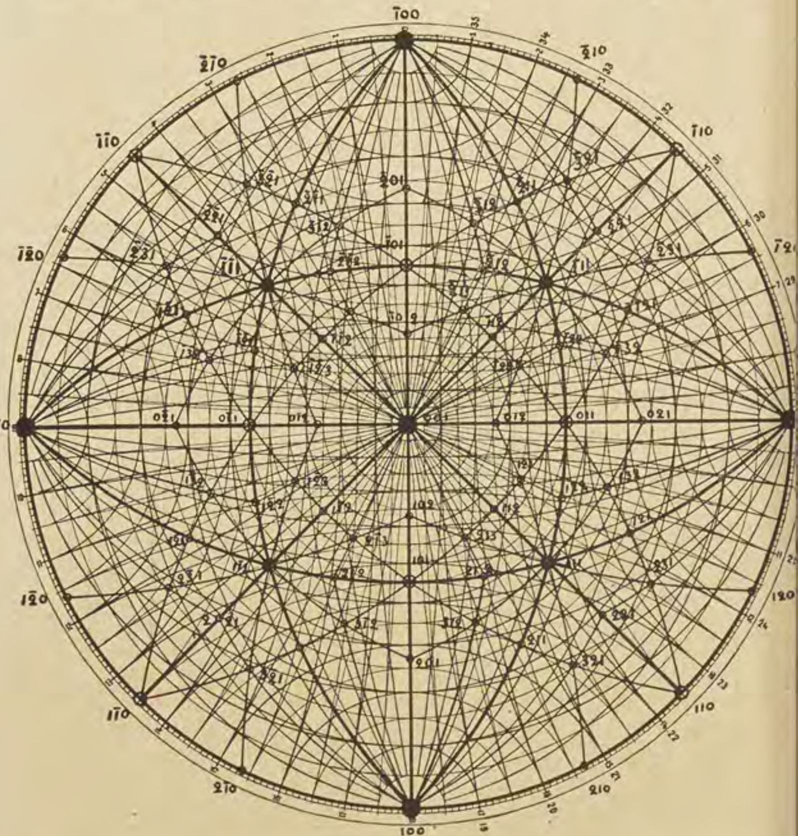


Рис. 172.

того, в состав такого пояса войдет еще одна пара граней, имеющих один из индексов символа равным нулю. В этом случае, мы принимаем за исходные для развития пояса: 1) одну из граней с символом, состоящим из одной единицы и двух

нулей и 2) грань с таким символом, в котором один из индексов равен нулю. Символ оси такого пояса будет непременно иметь один из индексов равным нулю.

Все вышеизложенные соотношения могут быть чрезвычайно просто выведены из уравнений (I) и (II), а также делаются непосредственно очевидными при рассмотрении рис. 172, представляющего собою гномостереографическую проекцию граней кубически-изотропного комплекса, символы которых состоят из индексов с числами не больше 4.

Рассмотрим теперь случай развития ребрового пояса. Как мы знаем, ребровой пояс представляет собою совокупность возможных ребер, находящихся в одной и той же возможной грани данного кристаллического комплекса. Для определения положения каждого ребра, принадлежащего данному ребровому поясу, необходимо знать взаимное положение и символы трех каких-нибудь ребер этого пояса.

Передвинем все ребра данного пояса в его плоскости параллельно самим себе до тех пор, пока они все не пройдут через одну и ту же точку *o* этой плоскости. Примем эту точку *o* за начало осей (рис. 173), а некоторые два возможных ребра $x_1$ и $x_2$ того же пояса за эти оси, которые мы назовем зональными осями данного пояса. Так как все ребра пояса находятся в одной плоскости, то нам совершенно достаточно знать положение двух зональных осей и отношение единичных отрезков по этим осям, чтобы определить положение и символ всякого возможного ребра, лежащего в той же плоскости. Если ребра $x_1$ и $x_2$ будут такими осями, то они получат зональные символы [10] и [01].

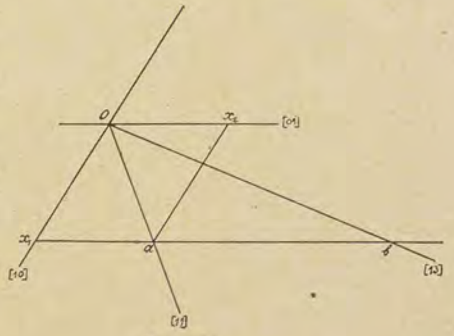


Рис. 173.

Для определения отношения единичных отрезков по двум взятым зональным осям, мы должны будем принять еще третье ребро, например, ребро $oa$ за некоторое известное направление т. е. приписать этому ребру определенный зональный символ, припишем такому ребру символ [11]. У нас имеются теперь три, совершенно определенных относительно друг друга, направления, два из которых $x_1$ и $x_2$ могут рассматриваться как стороны некоторого параллелограмма, диагональю которого служит ребро [11]. Отложим некоторый произвольный отрезок $ox_1$ на ребре [10] и проведем из точки $x_1$ прямую $x_1a \parallel ox_2$ до пересечения $x_1a$ с ребром [11] в точке $a$. Проведя $ax_2 \parallel ox_1$, получим параллелограмм $ox_1ax_2$, в котором отношение $ox_1 : ox_2$ равно отношению единичных отрезков по выбранным нами двум зональным осям [10] и [01]. Построенный нами параллелограмм мы можем рассматривать, как геометрическую модель элементарного параллелограмма данной плоской сетки пространственной решетки, так как отношение $ox_1 : ox_2$ пропорционально отношению промежутков рядов по $ox_1$ и $ox_2$. Такая модель, с геометрической точки зрения, будет обладать всеми свойствами данной плоской сетки, если только мы примем точки пересечения прямых (рис. 173) за гомологические точки плоской сетки. Определив, таким образом, данную плоскую сетку, мы можем построить любое возможное, лежащее в ней, ребро. Для этого необходимо только знать символ ребра, выраженный по отношению к двум выбранным зональным осям данного пояса ребер.

Положим (рис. 173), нам дано ребро, имеющее зональный символ [13]. Для построения этого ребра, на оси [10] откладываем единичный отрезок $ox_1$; проводим линию, параллельную оси $ox_2$, на которой откладываем отрезок $x_1b = 3ox_2$. Соединив точки $o$ и $b$, находим направление искомого ребра $ob$.

Аналогично поступаем и для нахождения положения ребра, какого угодно зонального символа $[pq]$.

Если нам даны три ребра с зональными символами $[p_1q_1]$, $[p_2q_2]$ и $[p_3q_3]$, то между индексами этих символов будет всегда существовать определенная связь, которая может быть представлена следующими уравнениями:

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0$$
$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 = 0$$

как это следует из указанных уже выше свойств символов граней комплекса. Так как у нас имеется всего два уравнения, причем, приняв за неизвестные $a_1$, $a_2$ и $a_3$, мы будем иметь три неизвестных, то ясно, что эти уравнения мы всегда можем решить однозначно, поставив условие, чтобы $a_1$, $a_2$ и $a_3$ были целыми положительными или отрицательными числами, не имеющими общего делителя. Таким образом, при решении этих двух уравнений нам достаточно получить отношение $a_1 : a_2 : a_3$, выраженное в виде отношения трех целых чисел. При таком условии, решение двух данных уравнений сводится к нахождению миноров детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

разложенного по первой строке. Найдя эти миноры, мы получим следующее решение уравнений:

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = a_1 : a_2 : a_3.$$

При таком решении мы можем иметь два случая:

1) Все три минора будут иметь один и тот же знак.

2) Один из миноров будет иметь знак, обратный знакам двух других.

В первом случае необходимо переменить знаки индексов зонального символа одного из ребер на обратные, т. е. взять другое направление этого ребра. Сделав это, мы опять придем к второму случаю. В этом втором случае вопрос решается непосредственно. В самом деле, положим $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = -b_3$. В таком случае, вставив в уравнения вместо $a_1$, $a_2$ и $a_3$ найденные величины, получаем:

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 - b_3 p_3 = 0$$
$$b_1 q_1 + b_2 q_2 - b_3 q_3 = 0$$

Из этих равенств находим:

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 = b_3 p_3$$

$$b_1 q_1 + b_2 q_2 = b_3 q_3$$

Из этих последних двух равенств мы заключаем, что ребро $[p_3 q_3]$ находится в угле меньшем $180^0$ между ребрами $[p_1 q_1]$ и $[p_2 q_2]$.

На основании указанных рассуждений, мы легко можем найти графическим путем направление зональных осей [10] и [01] данной плоской сетки. Для этого (рис. 174) откладываем произвольный отрезок $oc_1$ на ребре $[p_1 q_1]$; из конца $c_1$ этого отрезка проводим прямую, параллельную ребру $[p_2 q_2]$, до пересечения в точке $c_2$ с ребром $[p_3 q_3]$. Возьмем отношение $\frac{b_1 p_1}{b_3 p_3} = \frac{d_1}{d_2}$, причем $d_1$ и $d_2$ будут целыми числами. Отложим на линии $[p_3 q_3]$ отрезок $oc_3$, равный $\frac{d_1}{d_2}$ по отношению к длине $oc_2$. Отложив такой отрезок на линии $oc_2$, соединим прямой точки $c_1$ и $c_3$ и проведем через точку $o$ прямую $ox_1$ $c_1 c_3$. Прямая $ox_1$ и будет зональной осью [10]. Чтобы найти единичный отрезок по этой оси, разделим $ox_1$ на $p_1$ равных частей и возьмем $on = \frac{ox_1}{p_1}$, равную одному такому делению. Возьмем отношение $\frac{b_1 q_1}{b_3 q_3} = \frac{e_1}{e_2}$ и отложим на линии $[p_3 q_3]$ отрезок $oc_4$ равный $\frac{e_1}{e_2}$ по отношению к длине $oc_2$. Соединим прямой точки $c_1$ и $c_4$.

Проведя прямую $ox_2 \parallel c_1 c_4$, найдем направление зональной оси [01]. Разделим отрезок оси $ox_2$ между точкой $o$ и точкой пересечения этой оси с линией $c_1 c_3$ на $q_1$ равных частей и возьмем $on_1 = \frac{ox_2}{q_1}$. Отношение $on : on_1$ будет соответствовать отношению единичных отрезков по зональным осям [10] и [01]. На чертеже взят пример трех ребер с зональными символами:

$$[p_1 q_1] = [31], \quad [p_2 q_2] = [23] \quad \text{и} \quad [p_3 q_3] = [85].$$

Положим, плоскость рисунка 175 есть грань некоторого реберного пояса. Проведем в этой плоскости прямую $MN$,

не проходящую через точку $o$ пересечения ребер пояса, и параллельную ребру [01]. Пусть эта прямая $MN$ пересечет ребро [10] в точке $a$, а ребро [11] в точке $c$. Если мы примем отрезок $oa$ за единичный для исходного ребра [10], то для получения единичного отрезка, т. е. промежутка ряда по ребру [11], по вышеизложенному способу, необходимо построить параллелограмм, проведя через точку $a$ линию, параллельную ребру [01], т. е. линию $MN$, и через точку $c$ провести линию $PQ \parallel$ ребру [10]. Тогда $oc$ будет представлять собою промежуток ряда для ребра [11].

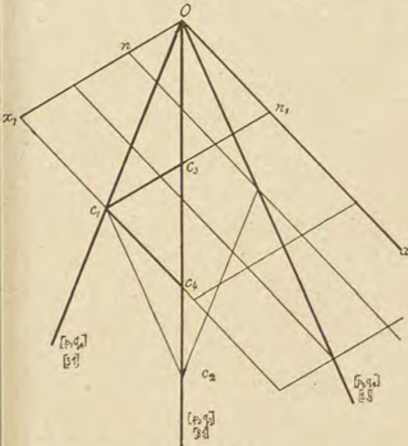


Рис. 174.

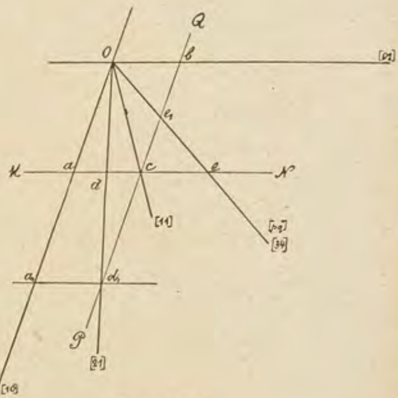


Рис. 175.

Если мы хотим построить ребро [21], то нам, по вышеописанному способу, необходимо отложить по направлению ребра [10] от точки $o$ отрезок $oa_1 = 2oa$ и через точку $a_1$ провести прямую $a_1 d_1 \parallel ob$, отложить на этой последней линии отрезок $a_1 d_1 = ac$, т. е. единице по ребру [01], и соединить точку $o$ с точкой $d_1$. Направление $od_1$ и будет искомым ребром символа [21].

В виду параллельности линий $ac$ и $a_1 d_1$, треугольники $a_1 o d_1$ и $aod$ подобны и следовательно $\frac{ad}{a_1 d_1} = \frac{oa}{oa_1}$ или, принимая во внимание, что $a_1 d_1 = ac$, а $oa = 1$, получаем $ac : ad = 2 : 1$.

Вообще, если мы будем, пользуясь вышеизложенным методом, строить различные ребра пояса, то мы каждый раз будем получать определенное отношение между отрезком прямой $MN$ от точки $a$ до точки пересечения данного ребра с этой прямой и отрезком $ac$. Это отношение будет соответствовать символу того ребра, которое мы строим. Таким образом, для ребра символа $[pq]$, пересекающего линию $MN$ в точке $e$, получаем: $ac:ae = p:q$, откуда $ae = \frac{q}{p} \cdot ac$.

Совершенно аналогично мы можем вывести заключение, что отрезок $be_1$ на линии $PQ$, параллельной ребру [10] и проходящей через точку $c$ ребра [11], будет находиться в определенном отношении к отрезку $bc$, в зависимости от символа ребра, пересекающего линию $PQ$ в точке $e_1$. Это отношение выразится следующим образом: $bc:be_1 = q:p$, откуда: $be_1 = \frac{p}{q} bc$. Из этих соотношений выводим простой способ построения ребер данного пояса по их зональным символам, если известны положения трех исходных ребер этого пояса [10], [01] и [11]. Для построения ребра символа $[pq]$ проводим (рис. 175) произвольную линию $MN$, не проходящую через точку $o$ и параллельную ребру [01]. Отрезок $ac$ между точками пересечения линии $MN$ с ребрами [10] и [11] делим на $p$ равных частей и от точки $a$ откладываем $q$ таких частей. Получаем точку $e$. Соединив эту точку с точкой $o$, получаем направление данного ребра $[pq]$. Точно такое же построение мы можем сделать, проведя линию $PQ$ параллельно ребру [10]. В этом случае, отрезок $bc$ мы должны разделить на $q$ равных частей и от точки $b$ отложить $p$ таких частей. Получаем точку $e_1$, соединяя которую с точкой $o$, находим направление данного ребра $[pq]$.

До сих пор мы рассматривали построение ребер в самом ребровом поясе, т. е. в плоской сетке, соответствующей этому поясу. Все способы построения останутся теми же самыми, если мы будем производить такие построения в плоскости линейных или гномонических проекций этого ребрового пояса. В самом деле, из рассмотренных уже ранее свойств двойных отношений, мы можем вывести заключение о такой возмож-

ности производить аналогичные построения, имея линейную или гномоническую проекцию данного пояса ребер. Кроме того, те же самые построения мы можем применить и для развития пояса граней, имея их гномонические или линейные проекции.

Определим теперь соотношение, которое можно установить между зональными символами и обычными или комплексиальными символами ребер. Мы уже упоминали, что за исходные ребра, для развития пояса, мы будем принимать те ребра, которые имеют в составе своих индексов нуль. Если грань ребрового пояса будет иметь символ $(p_1 p_2 p_3)$, то ребра этого пояса будут те, индексы символов которых удовлетворяют уравнению

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0.$$

Принимая последовательно $r_1$, $r_2$ и $r_3$ равными нулю, найдем: $p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0$. Откуда $r_2 : r_3 = \overline{p}_3 : p_2$ т. е. символ ребра, имеющего первый индекс нуль, будет: $[0, k\overline{p}_3, kp_2]$, где $k$ — коэффициент пропорциональности, т. е. некоторый множитель, превращающий $\overline{p}_3$ и $p_2$ во взаимно простые числа.

Для ребра, имеющего второй индекс символа равным нулю, получаем: $p_1 r_1 + p_3 r_3 = 0$, откуда:

$$r_1 : r_3 = \overline{p}_3 : p_1.$$

Следовательно, символ этого ребра будет:

$$[k' \overline{p}_3, 0, k' p_1].$$

Наконец, точно также получаем:

$$[k'' \overline{p}_2, k'' p_1, 0].$$

Если $p_1, p_2$ и $p_3$ попарно не имеют общих множителей, то коэффициенты $k = k' = k'' = 1$. В противном случае, некоторые из этих коэффициентов будут дробью, у которой числитель 1, а знаменатель — общий множитель для соответствующей пары индексов символа ребра. Приняв ребра

$$[0, k\overline{p}_3, kp_2], \quad [k' \overline{p}_3, 0, k' p_1] \quad \text{и} \quad [k'' \overline{p}_2, k'' p_1, 0]$$

за исходные для развития пояса, мы можем приписать двум из этих ребер символы [10] и [01], а третьему — зональ-

ный символ [11], соблюдая условие, чтобы конец ребра, имеющий символ [11] лежал между концами ребер [10] и [01].

Можно легко доказать теорему, что каждое ребро пояса, грань которого имеет символ $(p_1 p_2 p_3)$, будет иметь символ одной из трех возможных комбинаций:

$$n[0, k\bar{p}_3, kp_2] + m[k'\bar{p}_3, 0, k'p_1]$$

или

$$n[k'\bar{p}_3, 0, k'p_1] + m[k''\bar{p}_2, k''p_1, 0]$$

или, наконец,

$$n[0, k\bar{p}_3, kp_2] + m[k''\bar{p}_2, k''p_1, 0].$$

Таким образом, зная $p$, мы всегда можем найти положение данного ребра, разлагая его символы на одну из трех возможных комбинаций и приняв во внимание выведенные выше равенства, определяющие символы ребер

$$[0, k\bar{p}_3, kp_2], \quad [k'\bar{p}_3, 0, k'p_1] \quad \text{и} \quad [k''\bar{p}_2, k''p_1, 0].$$

Если мы припишем ребру $[0, k\bar{p}_3, kp_2]$ зональный символ [11], а ребру $[k'\bar{p}_3, 0, k'p_1]$ зональный символ [01], то ребро $[k''\bar{p}_2, k''p_1, 0]$ получит зональный символ [10]. Отсюда легко сделать общий вывод, что $m$ и $n$ будут теми же самыми множителями и для зональных символов, как и при комплексиальных, т. е. в зональных символах мы будем иметь полное соответствие с комплексиальными. В виду этого, мы всегда можем превратить комплексиальный символ в зональный и обратно. Для такого превращения, при принятом выше обозначении, необходимо только отбросить первый индекс символа каждого ребра и принять $k\bar{p}_3 = kp_2 = k'p_1 = k''p_1 = 1$.

Сделав такие допущения, мы можем получить зональные символы для какого угодно ребра данного пояса и по зональному символу ребра определить его комплексиальный и обратно. Такие определения могут быть сделаны на основании следующих, непосредственно вытекающих из всего только что изложенного, соотношений.

Комплексиальный символ ребра $[r_1 r_2 r_3]$ превращается в зональный $[n, n+m]$, если

$$[r_1 r_2 r_3] = [mk'\bar{p}_3,\ nk\bar{p}_3,\ nkp_2 + mk'p_1],$$

или в случае, если

$$[r_1 r_2 r_3] = [nk'\bar{p}_3 + k''p_2',\ mk''p_1,\ nk'p_1],$$

то тот же символ превращается в зональный $[mn]$.

Наконец, если

$$[r_1 r_2 r_3] = [mk'' \bar{p}_2,\ nk\bar{p}_3 + mk'' p_1,\ nkp_2],$$

то комплексиальный символ ребра превратится в зональный: $[n + m,\ n]$.

Таким образом, для определения зонального символа данного ребра, мы должны, прежде всего, в точности установить комплексиальные символы исходных ребер и приписать им соответствующие зональные символы. Кроме того, необходимо выяснить отношение комплексиального символа данного ребра к комплексиальным символам исходных ребер.

Как мы видели, в общем случае, в каждом ребровом поясе имеются три ребра, в символах которых один из индексов равен нулю. В частном случае, мы имеем некоторые ребровые пояса, в которых:

1) Имеются только два ребра с индексами символов, равными нулю. В этом случае одно из таких ребер имеет символ с двумя индексами, равными нулю, а другое ребро имеет символ с одним индексом, равным нулю.

2) В данном ребровом поясе все символы имеют одни индекс равным нулю, а два ребра имеют символы с двумя нулями в качестве индексов этих символов.

В первом случае за два исходных [10] и [01] мы можем принять ребра с символами, содержащими в виде индексов нули, а за ребро с зональным символом [11] принять то ребро, символ которого получается путем сложения индексов символов ребер, принятых за [10] и [01].

Во втором случае мы можем прямо отбросить тот индекс символа, который для всех ребер пояса равен нулю и, таким образом, получим непосредственно зональные символы для каждого из ребер пояса.

Все эти соображения относительно зональных символов ребер мы можем целиком применить и к зональным символам граней.

## 4. ЗОНАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

При рассмотрении свойств двойных отношений мы видели, что в случае пересечения четырех лучей пучка $o$ (рис. 176) произвольной прямой $MN$, мы можем выразить взаимное расположение лучей пучка при помощи двойного отношения. Если мы примем за постоянные лучи $oa$ и $ob$ и обозначим:

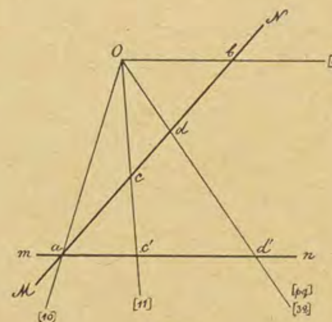



Рис. 176.

$$\angle aoc = \beta, \quad \angle boc = \gamma,$$
$$\angle aod = x, \quad \angle bod = \delta$$

и

$$\angle aob = \alpha,$$

то двойное отношение получит вид:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} : \frac{\sin x}{\sin\delta} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Если взятые нами лучи будут представлять собою 4 ребра некоторого пояса ребер кристаллического комплекса, то, на основании закона рациональности двойных отношений, мы должны будем вывести заключение о том, что отношение

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

будет отношением некоторых целых рациональных чисел.

Мы уже видели раньше, что при изменении положения прямой $MN$ двойное отношение не меняется. Пересечем наш пучек четырех ребер прямой $mn$, параллельной основному ребру $ob$. В таком случае, двойное отношение получит вид:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} : \frac{\sin x}{\sin\delta} = \frac{ac'}{\infty} : \frac{ad'}{\infty} = \frac{ac'}{ad'}.$$

Если мы припишем ребру $oa$ зональный символ [10], ребру $ob$ — зональный символ [01], ребру $oc$ — зональный символ [11] и ребру $od$ — зональный символ [$pq$], то, как мы видели раньше, $ac' : ad' = p : q$.

Следовательно: $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} : \frac{\sin x}{\sin\delta} = p : q.$

Заметив, что угол $\delta = \alpha - x$ и угол $\gamma = \alpha - \beta$, получаем:

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} : \frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = p : q. \qquad \text{(A)}$$

Сделав соответственные преобразования этой формулы, находим:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{p \cdot \operatorname{ctg}\beta + (q - p)\operatorname{ctg}\alpha}{q}. \qquad \text{(I)}$$

Для того, чтобы придать формуле (A) вид, удобный для логарифмирования, примем:

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot \frac{q}{p} = \operatorname{tg}\alpha'.$$

Сделав такое допущение, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)}$$

откуда

$$\operatorname{tg}(45^0 + \alpha') = \frac{\sin(\alpha - x) + \sin x}{\sin(\alpha - x) - \sin x} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)$$

или, наконец:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}(45^0 + \alpha'). \qquad \text{(II)}$$

Формулы (I) и (II) служат для вычисления угла между ребрами [10] и [$pq$] в данном поясе, если известны углы [10] : [11] и [01] : [10].

Положим, нам дан пучек ребер пояса $o$ (рис. 177). Проведем линию $MN$ параллельно ребру [01]. В таком случае точка $a$ пересечения ребра [10] с линией $MN$ разделит пополам отрезок $c_1 c_2$ прямой $MN$ и двойное отношение при постоянных $oa$ и $ob$ будет:

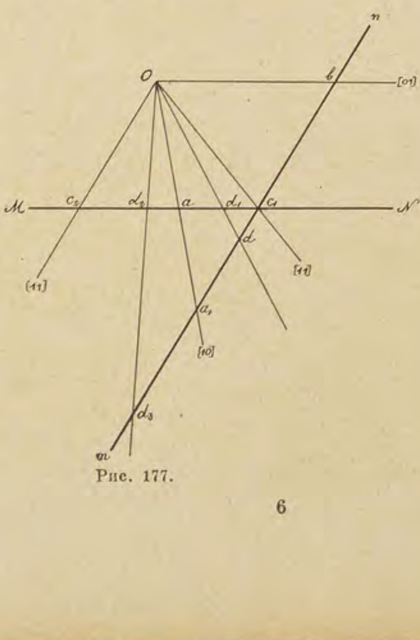


Рис. 177.

$$\frac{\sin(aoc_2)}{\sin(boc_2)} : \frac{\sin(aoc_1)}{\sin(boc_1)} = \frac{ac_2}{ac_1} = 1.$$

Таким образом, мы получаем ангармоническое отношение, равное 1. Это отношение мы можем выразить в форме:

$$\frac{\sin(boc_2 - aob)\cdot\sin(boc_1)}{\sin(boc_2)\cdot\sin(aob - boc_1)} = \frac{\operatorname{ctg}(aob) - \operatorname{ctg}(boc_2)}{\operatorname{ctg}(boc_1) - \operatorname{ctg}(aob)} = 1$$

или $$2\operatorname{ctg}(aob) = \operatorname{ctg}(boc_1) + \operatorname{ctg}(boc_2).$$

Обозначив:

$$\angle aob = \alpha, \quad \angle boc_1 = \beta \quad \text{и} \quad \angle boc_2 = \beta_1,$$

получаем: $$2\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta_1. \qquad \text{(III)}$$

Ясно, что эта формула (III) применима только в том случае, когда отрезок $ac_1$ равен отрезку $ac_2$ и имеет противоположное направление относительно точки $a$. Только это условие и ограничивает применение формулы (III), причем вовсе нет необходимости, чтобы ребра $oc_1$ и $oc_2$ имели символы $[11]$ и $[1\bar{1}]$. То же самое соотношение мы получим и для ребер $od_1$ и $od_2$, если только $ad_1 = ad_2$ и эти отрезки направлены в противоположные стороны от точки $a$.

Таким образом:

$$2\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma_1 \quad \text{где} \quad \gamma = \angle bod_1 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \angle bod_2.$$

Заметив, что $ad_1 = d_1c_1$, мы можем также найти:

$$2\operatorname{ctg}(d_1ob) = \operatorname{ctg}(aob) + \operatorname{ctg}(c_1ob).$$

Проведем через точку $c_1$ прямую $mn$ параллельно $oc_2$ и отметим соответственно буквами точки пересечения ребер $oa$, $ob$, $oc\ldots$ с этой прямой.

Треугольник $c_1aa_1$ равен треугольнику $oac_2$, так как $c_1a = c_2a$; углы при точке $a$ в обоих треугольниках равны, а кроме того $oc_2 \parallel c_1a_1$.

В виду этого, $c_1a_1 = oc_2$. Кроме того, $bc_1 = oc_2$, как отрезки параллельных $oc_2$ и $mn$ между параллельными $ob$ и $MN$.

Таким образом, мы имеем:

$$c_1 a_1 = c_1 b$$

и можем опять получить уравнение:

$$2 \operatorname{ctg} (c_1 o c_2) = \operatorname{ctg} (c_2 o a_1) + \operatorname{ctg} (c_2 o b).$$

Комбинируя, соответственным образом, ребра и принимая, как данные, ребра различных зональных символов, мы можем всегда пользоваться для вычислений углов уравнением (III), если только будем соблюдать известную последовательность при определении положения ребер.

## 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ПЛОСКИХ СЕТОК.

Каждая плоская сетка пространственной решетки представляет собою, как мы уже видели, некоторую возможную грань данного кристаллического комплекса.

Если мы возьмем в данной сетке какую-нибудь гомологическую точку и проведем через нее два произвольных сопряженных ряда, принадлежащих той же сетке, то на этих двух рядах можно построить элементарный параллелограмм, приняв за каждую сторону такого параллелограмма промежуток, соответствующий взятому ряду.

Величина площади такого параллелограмма равна величине площади основного элементарного параллелограмма данной плоской сетки. Эта последняя величина, постоянная и характерная для каждой плоской сетки, может быть названа ретикулярным параметром соответствующей грани.

Положим, нам дана некоторая плоская сетка пространственной решетки и в ней два какие-нибудь ряда. Если два данные ряда будут сопряженными, то, построив на них, как на сторонах, параллелограммы, увидим, что внутри таких параллелограммов не находится ни одной гомологической точки, причем все эти точки будут расположены в вершинах построенных параллелограммов.

Если два данные ряда не будут сопряженными, то не только в вершинах, но и внутри параллелограммов, построен-

ных на таких рядах, будут находиться гомологические точки данной сетки.

Положим (рис. 178), нам дан параллелограмм *oacd*, построенный на двух несопряженных рядах *oa* и *oc*. Такой

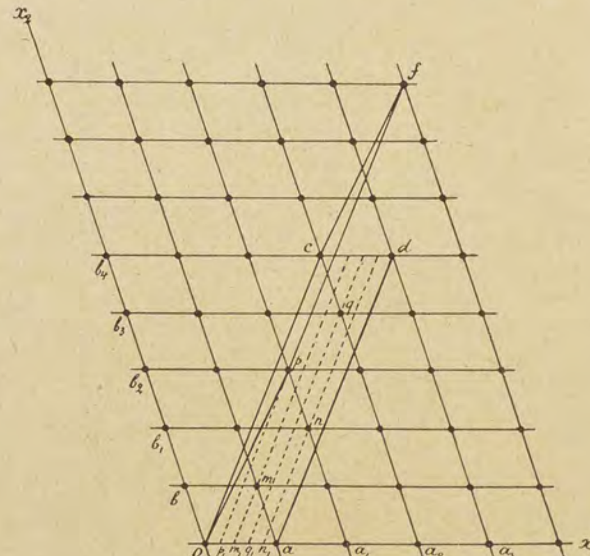



Рис. 178.

параллелограмм непременно должен содержать, кроме гомологических точек, расположенных в его вершинах, также и точки, находящиеся внутри его площади.

Приняв ряды *oa* и *ob* за оси координат $x_1$ и $x_2$, найдем $r_1$ и $r_2$, числовые координаты точки *c*.

Число рядов $bm \ldots$, $b_1 n \ldots$, $b_2 p \ldots$, параллельных оси $x_1$ и пересекающих параллелограмм *oacd*, очевидно, равно $r_2 - 1$. Отрезок каждого такого ряда, заключенный между параллельными рядами *oc* и *ad*, будучи равен параметру ряда *oa*, должен содержать только одну гомологическую точку, которая будет расположена внутри параллелограмма *oacd*.

Таким образом, число гомологических точек, содержащихся внутри этого параллелограмма, будет $r_2 - 1$.

Так как число точек, находящихся внутри взятого параллелограмма *oacd*, зависит только от абсолютной величины числовых координат $r_1$ и $r_2$, то эти величины мы всегда берем с знаком $+$.

Пусть *m*, *n*, *p*, *q* — гомологические точки, расположенные внутри параллелограмма *oacd*.

Ни одна пара таких точек не может находиться на одинаковом расстоянии от *oc*. В самом деле, если бы, напр., *m* и *p* находились на одинаковом расстоянии от прямой *oc*, то линия *mp* оказалась бы рядом, параллельным *oc*, причем этот ряд имел бы промежуток меньше *oc*, что противоречит принятому условию.

Если провести через точки *m*, *n*, *p* и *q* линии, параллельные *oc*, то мы получим серию рядов, параллельных *oc* и находящихся на равных расстояниях друг от друга.

Так как число точек, находящихся внутри параллелограмма *oacd*, по только что доказанному, равно $r_2 - 1$, то число полос, заключенных между прямыми $mm_1$, $nn_1$, $pp_1$, $qq_1$, параллельными *oc*, будет равно $r_2$.

Таким образом, отрезок *oa* будет разделен на $r_2$ равных частей и мы получим: $op_1 = \frac{oa}{r_2} = \frac{c_1}{r_2}$, где $c_1$ — промежуток ряда.

Пусть *s* будет площадь элементарного параллелограмма *oamb* данной плоской сетки.

Положим, что ряды *oc* и *op* — сопряженные, и построим на этих рядах параллелограмм *ocpf*, который будет также элементарным параллелограммом нашей плоской сетки. Можно легко доказать, что площадь *ocpf* равна площади $oamb = s$.

В самом деле, параллелограмм *ocpf* имеет то же основание, как и *oacd*, причем высоты этих двух параллелограммов различны.

На основании только что сделанных выводов, мы имеем:

$$\frac{\square\, ocpf}{\square\, oacd} = \frac{op_1}{oa} = \frac{1}{r_2},$$

где $r_2$ — числовая координата точки *c*.

С другой стороны:

$$\frac{\square\, oamb}{\square\, oacd} = \frac{ob}{ob_4} = \frac{1}{r_2},$$

откуда: площадь $ocpf$ = площади $oamb = s$, что и требовалось доказать.

Таким образом, величина площади элементарного параллелограмма данной плоской сетки будет одна и та же, на каких бы двух сопряженных рядах мы ни построили такой параллелограмм.

## 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ.

Элементарный параллелепипед данной пространственной решетки имеет всегда один и тот же об'ем, независимо от того, какие три сопряженных ряда решетки взяты для его построения.

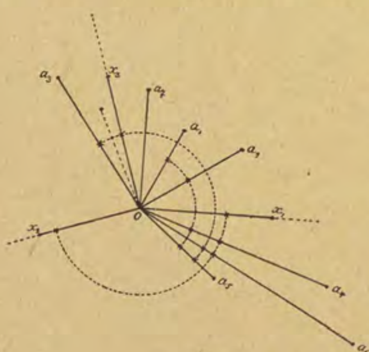


Рис. 179.

Пусть $ox_1$, $ox_2$ и $ox_3$ (рис. 179) — три сопряженные ряда пространственной решетки, причем длины $ox_1$, $ox_2$, $ox_3$ представляют собою промежутки соответственных рядов.

Положим, $V$ — об'ем элементарного параллелепипеда, построенного на $ox_1$, $ox_2$, $ox_3$, как на данных ребрах. Положим, кроме того, что нам даны еще три сопряженных ряда $oa_1$, $oa_2$, $oa_3$ той же решетки, причем $V'$ — об'ем элементарного параллелепипеда, построенного на этих рядах.

Ясно, что, если $oa_4$ — линия пересечения сетки $a_1oa_2$ с плоскостью $x_1ox_2$, причем $o$ — гомологическая точка, общая обоим плоскостям, то линия $oa_4$ будет рядом гомологических точек.

Пусть $oa_5$ будет один из рядов, лежащих в сетке $a_1oa_2$ и сопряженных с рядом $oa_4$.

Построим на трех сопряженных рядах $oa_4$, $oa_5$ и $oa_3$ элементарный параллелепипед. Этот параллелепипед будет иметь тот же об'ем $V'$, как и параллелепипед, построенный на рядах $oa_1$, $oa_2$ и $oa_3$.

В самом деле, приняв за основание параллелепипеда $oa_1a_2a_3$ параллелограмм, построенный на рядах $oa_1$ и $oa_2$, а для параллелепипеда $oa_4a_5a_3$ — параллелограмм, построенный на рядах $oa_4$ и $oa_5$, мы найдем, что площади этих оснований будут равны друг другу, как элементарные параллелограммы одной и той же плоской сетки $a_1oa_2$. Вследствие этого, об'емы параллелепипедов, построенных на ребрах $oa_1$, $oa_2$, $oa_3$ и $oa_4$, $oa_5$, $oa_3$ будут равны друг другу.

Пусть, $oa_6$ — ряд пересечения плоскостей $oa_5a_3$ и $x_1ox_2$, а $oa_7$ — ряд, сопряженный $oa_6$ и находящийся в плоскости $oa_5a_3$. Параллелепипеды, построенные на сопряженных рядах $oa_4$, $oa_5$, $oa_3$ и $oa_4$, $oa_7$, $oa_6$ опять будут иметь равные об'емы, как и в предыдущем случае.

Можно, наконец, заменить ряды $oa_4$, $oa_7$, $oa_6$ рядами $ox_1$, $ox_2$, $oa_7$, так как $ox_1$ и $ox_2$ — два сопряженные ряда плоской сетки $a_4oa_6$, которая совпадает по своему положению с плоскостью $x_1ox_2$. Вследствие этого, об'ем элементарно.о параллелепипеда останется тем же, а именно $V'$.

Если сравнить об'ем этого последнего параллелепипеда с об'емом параллелепипеда, построенного на сопряженых рядах $ox_1$, $ox_2$, $ox_3$, то эти об'емы также будут равны, т. е. $V' = V$. Это равенство вытекает из того, что элементарные параллелепипеды $ox_1x_2a_7$ и $ox_1x_2x_3$ имеют равные основания — параллелограммы, построенные на отрезках прямых $ox_1$ и $ox_2$, равных промежуткам рядов, определяемых этими прямыми. Кроме того, и высоты этих параллелепипедов будут также равны между собой, как расстояние между плоскими сетками: $ox_1x_2$ и ближайшей, параллельной ей.

В виду того, что об'ем элементарного параллелепипеда данной пространственной решетки является постоянным, мы можем назвать средним расстоянием между точками решетки длину $E$ ребра куба, об'ем которого равен об'ему элементарного параллелепипеда данной пространственной решетки.

Приняв такое обозначение, мы получаем $E^3 = V$, откуда $E = \sqrt[3]{V}$, где $V$ — об'ем элементарного параллелепипеда данной пространственной решетки.

## 7. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СЕТКАМИ.

Пусть $ox_1$, $ox_2$, $ox_3$ — три сопряженных ряда пространственной решетки, принятых за оси координат (рис. 180).

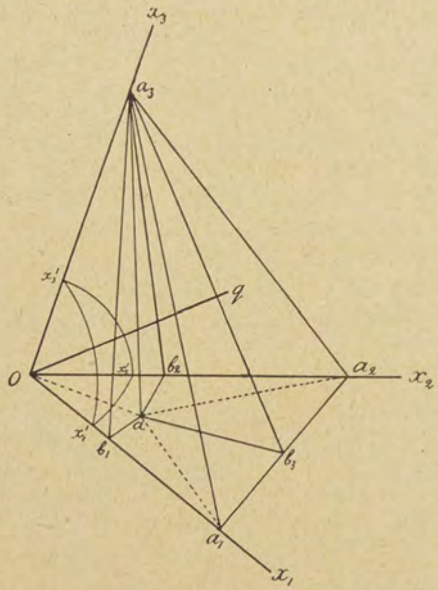



Рис. 180.

Положим, плоская сетка $a_1 a_2 a_3$, пересекающая эти координатные оси в точках $a_1$, $a_2$ и $a_3$, характеризуется уравнением:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 1 \qquad (1)$$

Координаты точки $a_1$ будут $x_1$, 0, 0

„ „ $a_2$ „ 0, $x_2''$, 0

„ „ $a_3$ „ 0, 0, $x_3'''$

Положим, промежуток ряда по оси $ox_1$ будет $c_1$, по оси $ox_2$ — $c_2$ и по оси $ox_3$ — $c_3$.

Вставив в уравн. (1) вместо $x_1$, $x_2$ и $x_3$ координаты точки $a_1$, находим:

$$p_1 x_1 = 1, \text{ откуда: } x_1 = \frac{1}{p_1}.$$

Точно также, вставив вместо $x_1$, $x_2$ и $x_3$ координаты точки $a_2$ и $a_3$, найдем:

$$p_2 x_2'' = 1 \text{ и } p_3 x_3''' = 1.$$

В этих последних выражениях:

$$x_1 = \frac{1}{c_1}; \quad x_2'' = \frac{1}{c_2} \quad \text{и} \quad x_3''' = \frac{1}{c_3}$$

Если мы подставим эти значения в только что выведенные равенства, то получим выражения длин отрезков на координатных осях в линейных мерах, причем линейные единицы для всех отрезков будут равны друг другу.

Таким образом, выразив длины отрезков $oa_1$, $oa_2$ и $oa_3$ в равных линейных мерах, получаем:

$$oa_1 = \frac{c_1}{p_1}; \; oa_2 = \frac{c_2}{p_2}; \; oa_3 = \frac{c_3}{p_3} \qquad (2)$$

Обозначим:

$$\angle x_1 o x_2 = x_1 x_2; \; \angle x_1 o x_3 = x_1 x_3; \; \angle x_2 o x_3 = x_2 x_3.$$

Двугранный угол, для которого ребром служит $ox_1$, обозначим $X_1$; двугранный угол с ребром $ox_2 = X_2$ и с ребром $ox_3 = X_3$. Двугранный угол с ребром $a_1 a_2$ обозначим через $\varphi$, с ребром $a_1 a_3$ — $\chi$ и с ребром $a_2 a_3$ — $\psi$.

Из точки $a_3$ опустим перпендикуляр $a_3 a$ на плоскость $oa_1 a_2$ и через этот перпендикуляр проведем плоскости $a_3 a b_1$, $a_3 a b_2$ и $a_3 a b_3$, перпендикулярные к линиям $ox_1$, $ox_2$ и $a_1 a_2$.

Сделав такое построение, получаем:

$$\angle a_3 b_1 a = X_1; \; \angle a_3 b_2 a = X_2; \; \angle a_3 b_3 a = \varphi.$$

Соединим точку $a$ с $o$, $a_1$ и $a_2$ прямыми $ao$, $aa_1$ и $a_1 a_2$ изображенными на рис. 180 пунктирными линиями.

Отношение площадей треугольников $oa_3a_1$ и $oaa_1$, имеющих равные основания $oa_1$ и разные высоты $a_3b_1$ и $ab_1$ будет равно отношению этих высот, т. е.

$$\frac{\triangle\, oa_3a_1}{\triangle\, oaa_1}=\frac{a_3b_1}{ab_1}$$

Из прямоугольного треугольника $a_3ab_1$ имеем:

$$ab_1 = a_3b_1 \cos X_1.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\triangle\, oa_3a_1}{\triangle\, oaa_1}=\frac{1}{\cos X_1};$$

откуда: $$\triangle\, oaa_1 = \triangle oa_3a_1 \cdot \cos X_1.$$

Путем совершенно аналогичных рассуждений получаем:

$$\triangle\, oaa_2 = \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_2 \text{ и } \triangle\, aa_1a_2 = \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \cos \varphi.$$

Сложив почленно эти равенства, находим:

$$\triangle\, oaa_1 + \triangle\, oaa_2 + \triangle\, a_1aa_2 = \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos X_1 + \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_2 + \triangle\, a_1a_3a_2 \cdot \cos \varphi = \triangle\, oa_1a_2$$

На основании подобных же рассуждений можно вывести, для площади каждой треугольной грани сфеноида $oa_1a_2a_3$, следующие выражения:

$$\triangle\, oa_1a_2 = \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos X_1 + \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X + \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \cos \varphi,$$

откуда:

$$\cos \varphi = \frac{\triangle\, oa_1a_2 - \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos X_1 - \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_2}{\triangle\, a_1a_2a_3};$$

$$\triangle\, oa_1a_3 = \triangle\, oa_1a_2 \cdot \cos X_1 + \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_3 + \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \cos \chi,$$

откуда:

$$\cos \chi = \frac{\triangle\, oa_1a_3 - \triangle\, oa_1a_2 \cdot \cos X_1 - \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_3}{\triangle\, a_1a_2a_3};$$

$$\triangle\, oa_2a_3 = \triangle\, oa_1a_2 \cos \cdot X_2 + \triangle oa_1a_3 \cos \cdot X_3 + \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \cos \psi,$$

откуда:

$$\cos\psi = \frac{\triangle\, oa_2a_3 - \triangle\, oa_1a_2 \cdot \cos X_2 - \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos X_3}{\triangle\, a_1a_2a_3};$$

$$\triangle\, a_1a_2a_3 = \triangle\, oa_1a_2 \cdot \cos\varphi + \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos\chi + \\ + \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos\psi.$$

Подставив в этом последнем уравнении вместо $\cos\varphi$, $\cos\chi$ и $\cos\psi$ их только что выведенные значения, получаем:

$$(\triangle\, a_1a_2a_3)^2 = (\triangle\, oa_1a_2)^2 + (\triangle\, oa_1a_3)^2 + \\ + (\triangle\, oa_2a_3)^2 - 2\triangle\, oa_1a_2 \cdot \triangle\, oa_1a_3 \cdot \cos X_1 - \\ - 2\triangle\, oa_1a_2 \cdot \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_2 - \\ - 2\triangle\, oa_1a_3 \cdot \triangle\, oa_2a_3 \cdot \cos X_3.$$

Таким образом, мы видим, что (в каждом сфеноиде): квадрат площади одной из граней сфеноида равен сумме квадратов площадей трех других его граней без удвоенных произведений тех же площадей по две взятых на косинусы двугранных углов между этими площадями.

Из чертежа 180 видно, что площадь треугольника $oa_1a_2$ может быть выражена:

$$\triangle\, oa_1a_2 = \frac{1}{2}\, oa_1 \cdot oa_2 \cdot \sin x_1x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1c_2}{p_1p_2} \cdot \sin x_1x_2$$

Точно также:

$$\triangle\, oa_1a_3 = \frac{1}{2}\, oa_1 \cdot oa_3 \cdot \sin x_1x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1c_3}{p_1p_3} \cdot \sin x_1x_3$$

$$\triangle\, oa_2a_3 = \frac{1}{2}\, oa_2 \cdot oa_3 \cdot \sin x_2x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2c_3}{p_2p_3} \cdot \sin x_2x_3$$

Вставив эти выражения в формулу квадрата площади $\triangle\, a_1a_2a_3$ грани сфеноида, находим:

$$4(\triangle\, a_1a_2a_3)^2 = \frac{c_1^2c_2^2}{p_1^2p_2^2} \cdot \sin^2 x_1x_2 + \frac{c_1^2c_3^2}{p_1^2p_3^2} \cdot \sin^2 x_1x_3 + \\ + \frac{c_2^2c_3^2}{p_2^2p_3^2} \cdot \sin^2 x_2x_3 - 2\frac{c_1^2c_2c_3}{p_1^2p_2p_3} \cdot \sin x_1x_2 \cdot \sin x_1x_3 \cdot \cos X_1 - \\ - 2\frac{c_1c_2^2c_3}{p_1p_2^2p_3} \cdot \sin x_1x_2 \cdot \sin x_2x_3 \cdot \cos X_2 - \\ - 2\frac{c_1c_2c_3^2}{p_1p_2p_3^2} \cdot \sin x_2x_3 \cdot \sin x_1x_3 \cdot \cos X_3 \qquad (3)$$

Приняв за основание сфеноида грань $a_1 a_2 a_3$, опустим из вершины $o$ перпендикуляр $oq = h$ на эту грань.

Об'ем сфеноида $V$, как известно, будет выражаться равенством:

$$V = \frac{\triangle\, a_1 a_2 a_3 \cdot h}{3},$$

Если принять за основание сфеноида треугольник $o a_1 a_2$, то тот же об'ем $V$ выразится равенством:

$$V = \frac{\triangle\, o a_1 a_2 \cdot a a_3}{3}$$

Из этих выражений получаем:

$$h \cdot \triangle\, a_1 a_2 a_3 = a a_3 \cdot \triangle\, o a_1 a_2 \qquad (4)$$

Из прямоугольного треугольника $a_3 a b_1$ имеем: $a a_3 = a_3 b_1 \sin X_1$, а из прямоугольного треугольника $a_3 b_1 o$ получаем: $a_3 b_1 = o a_3 \cdot \sin x_1 x_3$.

Таким образом, находим:

$$a a_3 = o a_3 \cdot \sin X_1 \cdot \sin x_1 x_3.$$

На основании равенства (2) получаем:

$$a a_3 = \frac{c_3}{p_3} \sin x_1 x_3 \cdot \sin X_1.$$

Возведя в квадрат уравнение (4) и подставив в полученном уравнении вместо $a a_3$, только что найденное ее значение, а вместо площади $\triangle\, o a_1 a_2$ ее выражение из равенства (1), находим:

$$h^2 = \frac{c_1^2 c_2^2 c_3^2 \cdot \sin^2 x_1 x_2 \cdot \sin^2 x_1 x_3 \cdot \sin^2 X_1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 \cdot 4\,(\triangle\, a_1 a_2 a_3)^2} \qquad (5)$$

Приняв точку $o$ за центр, опишем шаровую поверхность радиусом $ox_1' = ox_2' = ox_3'$. Плоскости $x_1 o x_2$, $x_1 o x_3$ и $x_2 o x_3$ пересекутся с поверхностью построенной сферы по дугам больших кругов $x_1' x_2' = \angle\, x_1 x_2$, $x_1' x_3' = \angle\, x_1 x_3$ и $x_2' x_3' = \angle\, x_2 x_3$, образующих сферический треугольник.

Из сферической тригонометрии мы знаем, что

$$\cos x_2 x_3 = \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_1 x_2 + \sin x_1 x_3 \cdot \sin x_1 x_2 \cdot \cos X_1.$$

Из этого выражения мы можем вывести:

$$a)\quad \cos X_1 = \frac{\cos x_2 x_3 - \cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3}{\sin x_1 x_2 \cdot \sin x_1 x_3},$$

откуда:

$$\sin^2 X_1 = \frac{1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + 2\cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3}{\sin^2 x_1 x_2 \cdot \sin^2 x_1 x_3}$$

Подставив это выражение вместо $\sin^2 X_1$ в уравнение (5) и заменив в этом уравнении $\triangle a_1 a_2 a_3$ ее значением из равенства (3), получаем:

$$h^2 = \frac{1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + 2\cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3}{\frac{p_1^2}{c_1^2}\sin^2 x_2 x_3 + \frac{p_2^2}{c_2^2}\sin^2 x_1 x_3 + \frac{p_3^2}{c_3^2}\sin^2 x_1 x_2 - \frac{2p_1 p_2}{c_1 c_2}\sin x_2 x_3 \cdot \sin x_1 x_3 \cdot \cos X_3 - \frac{2p_1 p_3}{c_1 c_3}\sin x_2 x_3 \cdot \sin x_1 x_2 \cdot \cos X_2 - \frac{2p_2 p_3}{c_2 c_3}\sin x_1 x_2 \cdot \sin x_1 x_3 \cdot \cos X_1} \quad (6)$$

Из построенного нами сферического треугольника мы имеем также:

$$b)\quad \cos X_2 = \frac{\cos x_1 x_3 - \cos x_1 x_2 \cdot \cos x_2 x_3}{\sin x_1 x_2 \cdot \sin x_2 x_3} \quad \text{и}$$

$$c)\quad \cos X_3 = \frac{\cos x_1 x_2 - \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3}{\sin x_1 x_3 \cdot \sin x_2 x_3}$$

Вставляя значения $\cos X_1$, $\cos X_2$ и $\cos X_3$ из выражений a), b) и c) в уравнение (6), получаем:

$$h^2 = \frac{1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + 2\cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3}{\frac{p_1^2}{c_1^2} + \frac{p_2^2}{c_2^2} + \frac{p_3^2}{c_3^2} - \frac{2p_1 p_2}{c_1 c_2}\cos x_1 x_2 - \frac{2p_1 p_3}{c_1 c_3}\cos x_1 x_3 - \frac{2p_2 p_3}{c_2 c_3}\cos x_2 x_3 - \left(\frac{p_1}{c_1}\cos x_2 x_3 + \frac{p_2}{c_2}\cos x_1 x_3 + \frac{p_3}{c_3}\cos x_1 x_2\right)^2} \quad (7)$$

На основании сделанного построения, мы заключаем, что $h = oq$ будет представлять собою расстояние между двумя ближайшими, параллельными друг другу, плоскими сетками символа $(p_1 p_2 p_3)$.

## 8. ОБ'ЕМ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА И ПЛОЩАДЬ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

Если обозначим через $s$ величину, равную площади элементарного параллелограмма плоской сетки $(p_1 p_2 p_3)$, то $s . h = V$, где $V$ — величина, равная об'ему элементарного параллелепипеда данной пространственной решетки, $ah$ — расстояние между двумя ближайшими друг к другу плоскими сетками символа $(p_1 p_2 p_3)$.

Уже раньше было доказано, что $V$ будет постоянным, на каких бы трех сопряженных рядах мы ни построили элементарный параллелепипед данной плоской сетки. Об'ем $V$ каждого такого параллелепипеда, как мы видели, будет выражаться $V = h . s$.

Таким образом: $s = \frac{V}{h}$

Легко доказать, что

$$V = c_1 c_2 c_3 \cdot \sqrt{\begin{matrix} 1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + \\ + 2 \cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3 \end{matrix}}$$

В самом деле, построим элементарный параллелепипед на трех сопряженных рядах $ox'_1$, $ox'_2$ и $ox'_3$ (рис. 181), причем

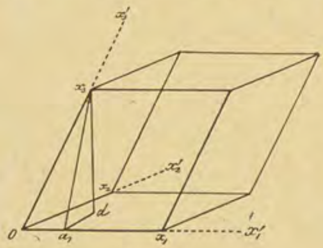


Рис. 181.

$$ox_1 = c_1,\ ox_2 = c_2 \text{ и } ox_3 = c_3,$$

где $c_1$, $c_2$ и $c_3$ — длины промежутков соответствующих рядов.

Из точки $x_3$ опускаем перпендикуляр $x_3 d$ на плоскость $ox_1 x_2$ и другой $x_3 a_1$ на линию $ox_1$.

Из прямоугольного треугольника $x_3 d a_1$ получаем:

$$x_3 d = x_3 a_1 \cdot \sin (\angle x_3 a_1 d),$$

причем $\angle x_3 a_1 d$ будет двугранным углом между плоскостями $ox_1 x_2$ и $ox_1 x_3$.

Из прямоугольного треугольника $x_3 a_1 o$ находим: $x_3 a_1 = ox_3 \cdot \sin x_1 x_3$, где $x_1 x_3$ — угол между $ox_1$ и $ox_3$.

Из этих выражений определяем:

$$x_3 d = ox_3 \cdot \sin x_1 x_3 \cdot \sin (\angle\, x_3 a_1 d).$$

Заменив угол $x_3 a_1 d$ его выражением посредством углов $x_2 o x_3 = x_2 x_3$, $x_1 o x_3 = x_1 x_3$ и $x_1 o x_2 = x_1 x_2$, совершенно аналогично, как и в случае нахождения высоты $aa_3$ сфеноида $oa_1 a_2 a_3$ (рис. 180), получаем:

$$x_3 d = \frac{ox_3}{\sin x_1 x_2} \sqrt{\begin{matrix} 1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + \\ + 2 \cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 . \cos x_2 x_3 \end{matrix}}$$

Так как площадь параллелограмма $ox_1 x_2$ равна

$$ox_1 \cdot ox_2 \cdot \sin x_1 x_2, \text{ то}$$

$$V = c_1 c_2 c_3 \cdot \sqrt{\begin{matrix} 1 - \cos^2 x_1 x_2 - \cos^2 x_1 x_3 - \cos^2 x_2 x_3 + \\ + 2 \cos x_1 x_2 \cdot \cos x_1 x_3 \cdot \cos x_2 x_3 \end{matrix}}$$

Подставив в выражении $s = \frac{V}{h}$ вместо $V$ только что найденную величину, а вместо $h$ соответственную величину из уравнения (6) § 7, находим:

$$s^2 = c_1^2 c_2^2 c_3^2 \cdot \Big( \frac{p_1^2}{c_1^2} \sin^2 x_2 x_3 + \frac{p_2^2}{c_2^2} \sin^2 x_1 x_3 + \frac{p_3^2}{c_3^2} \sin^2 x_1 x_2 - \frac{2 p_1 p_2}{c_1 c_2} \cdot$$
$$\cdot \sin x_1 x_3 \cdot \sin x_2 x_3 \cdot \cos X_3 - \frac{2 p_1 p_3}{c_1 c_3} \cdot \sin x_1 x_2 \cdot \sin x_2 x_3 \cdot$$
$$\cdot \cos X_2 - \frac{2 p_2 p_3}{c_2 c_3} \cdot \sin x_1 x_2 \cdot \sin x_1 x_3 \cdot \cos X_1 \Big) \qquad (8)$$

или

$$\left. \begin{matrix} s^2 = c_2^2 c_3^2 p_1^2 \sin^2 x_2 x_3 + c_1^2 c_3^2 p_2^2 \sin^2 x_1 x_3 + c_1^2 c_2^2 p_3^2 \sin^2 x_1 x_2 - \\ - 2 c_1 c_2 c_3^2 p_1 p_2 \sin x_1 x_3 \cdot \sin x_2 x_3 \cdot \cos X_3 - 2 c_1 c_2^2 c_3 p_1 p_3 \sin x_1 x_2 \cdot \\ \cdot \sin x_2 x_3 \cdot \cos X_2 - 2 c_1^2 c_2 c_3 p_2 p_3 \sin x_1 x_2 \cdot \sin x_1 x_3 \cdot \cos X_1 \end{matrix} \right\} (8a)$$

Обозначим площади элементарных параллелограммов соответственных плоских сеток символов (100), (010), (001) и $(p_1 p_2 p_3)$ через $s_{(100)}$, $s_{(010)}$, $s_{(001)}$ и $s_{(p_1 p_2 p_3)}$.

Из уравнения (8) получаем:

$$s_{(100)} = c_1 c_2 c_3 \cdot \frac{1}{c_1} \sin x_2 x_3 = c_2 c_3 \cdot \sin x_2 x_3$$

$$s_{(010)} = c_1 c_2 c_3 \cdot \frac{1}{c_2} \sin x_1 x_3 = c_1 c_3 \cdot \sin x_1 x_3$$

$$s_{(001)} = c_1 c_2 c_3 \cdot \frac{1}{c_3} \sin x_1 x_2 = c_1 c_2 \cdot \sin x_1 x_2$$

Вставив эти выражения в уравнение (8а), находим:

$$s^2_{(p_1p_2p_3)} = s^2_{(100)}\,p_1^2 + s^2_{(010)}\,p_2^2 + s^2_{(001)}\,p_3^2 - 2\,p_1\,s_{(100)} \cdot p_2\,s_{(010)} \cdot \cos X_3 - 2p_1\,s_{(100)} \cdot p_3\,s_{(001)} \cdot \cos X_2 - 2p_2\,s_{(010)} \cdot p_3 s_{(001)} \cos X_1 \qquad (9)$$

## 9. ПОЛЯРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ РЕШЕТКА.

Положим, нам дана некоторая пространственная решетка. Проведем через одну из гомологических точек, принятую за начало координат, перпендикуляры к трем сопряженным плоским сеткам данной пространственной решетки. На каждом таком перпендикуляре отложим, начиная от точки, принятой за начало, длину, равную отношению между величиной площади элементарного параллелограмма той плоской сетки, к которой перпендикулярна данная нормаль, и средним расстоянием между гомологическими точками данной решетки.

Эти три нормали мы можем рассматривать, как три сопряженных ряда некоторой пространственной решетки. Приняв эти ряды за координатные оси, мы можем построить пространственную решетку, которая будет называться полярной решеткой по отношению к первоначально взятой решетке.

Ряды и плоские сетки полярной пространственной решетки мы будем обозначать такими же символами, как мы это делали при обозначении соответственных образов в первоначальной решетке, заключая эти символы в фигурные скобки { }. Таким образом, символ $\{[r_1r_2r_3]\}$ будет обозначать некоторый ряд полярной решетки: $\{[p_1p_2p_3]\}$ обозначает определенную плоскую сетку данной полярной решетки и т. д.

Обозначим: $x_1x_2$, $x_1x_3$, $x_2x_3$ — плоские углы между соответственными осями координат в первоначальной решетке; $X_1$, $X_2$, $X_3$ — двугранные углы между плоскостями координат, для которых последовательно ребрами пересечения будут служить $x_1$, $x_2$, $x_3$.

В полярной пространственной решетке мы примем за оси:

$\{x_1\}$ — нормаль к плоской сетке $x_2x_3$ первоначальной решетки,

$\{x_2\}$ — „ „ „ „ $x_1x_3$ „ „ ,

$\{x_3\}$ — „ „ „ „ $x_1x_2$ „ „ .

Положительные концы этих осей мы примем направленными в ту же сторону, как и положительные концы осей $x_1$, $x_2$ и $x_3$ первоначальной пространственной решетки.

Обозначим плоский угол между осями $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ через $\{x_1 x_2\}$; плоский угол между $\{x_1\}$ и $\{x_3\}$ через $\{x_1 x_3\}$ и плоский угол между $\{x_2\}$ и $\{x_3\}$ через $\{x_2 x_3\}$.

Двугранный угол между плоскостями осей, для которого ребром будет служить ось $\{x_1\}$, обозначим через $\{X_1\}$; двугранный угол с ребром $\{x_2\}$ обозначим через $\{X_2\}$ и, наконец, двугранный угол с ребром $\{x_3\}$ обозначим через $\{X_3\}$.

Приняв такие обозначения, мы увидим, что промежутки рядов, принятых за оси $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ и $\{x_3\}$ будут:

$$\text{По оси } \{x_1\} — \{c_1\} = s_{(100)} = c_2 c_3 \cdot \sin x_2 x_3,$$
$$\{x_2\} — \{c_2\} = s_{(010)} = c_1 c_3 \cdot \sin x_1 x_3,$$
$$\{x_3\} — \{c_3\} = s_{(001)} = c_1 c_2 \cdot \sin x_1 x_2.$$

На основании известных свойств полярных сферических треугольников, мы имеем:

$$\{x_1 x_2\} = 180^0 - X_3;\ \{x_1 x_3\} = 180^0 - X_2;\ \{x_2 x_3\} = 180^0 - X_1.$$
$$\{X_1\} = 180^0 - x_2 x_3;\ \{X_2\} = 180^0 - x_1 x_3;\ \{X_3\} = 180^0 - x_1 x_2.$$

Изучение свойств полярной пространственной решетки имеет чрезвычайно важное значение для решения наиболее простым и удобным способом целого ряда проблем геометрической кристаллографии.

## 10. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ.

Положим, $ABD$ некоторый треугольник в плоскости $M$ (рис. 182).

Пусть $N$ — плоскость, проходящая через вершину $B$ треугольника $ABD$, пересекающаяся с плоскостью $M$ по линии $BF$ и образующая с этой плоскостью двугранный угол $\alpha$.

Из вершин $A$ и $D$ треугольника $ABD$ опускаем перпендикуляры $AA_1$ и $DD_1$, на плоскость $N$ и через $AA_1$

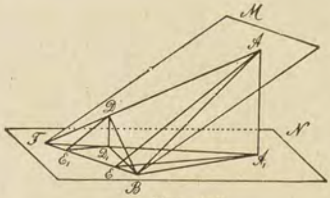


Рис. 182.

проводим плоскость $AA_1E$, перпендикулярную к линии $BF$ пересечения плоскостей $M$ и $N$. Соединив прямыми точки $A$, $B$ и $D$, получаем ортогональную проекцию треугольника $ABD$ на плоскости $N$.

Заметив, что по построению $AE$ и $A_1E$ перпендикулярны к $BF$, находим:

$$\triangle ABF = \tfrac{1}{2} BF \cdot AE \quad \text{и} \quad \triangle A_1BF = \tfrac{1}{2} BF \cdot A_1E,$$

откуда:
$$\frac{\triangle ABF}{\triangle A_1BF} = \frac{AE}{A_1E}.$$

Опустив из точки $D$ перпендикуляр $DE_1$ на линию $BF$, находим:

$$\triangle BDF = \tfrac{1}{2} BF \cdot DE_1$$
$$\triangle BD_1F = \tfrac{1}{2} BF \cdot D_1E_1,$$

откуда получаем:
$$\frac{\triangle BDF}{\triangle BD_1F} = \frac{DE_1}{D_1E_1}.$$

Из прямоугольных треугольников $AA_1E$ и $DD_1E_1$ находим:

$$A_1E = AE \cos\alpha$$
$$D_1E_1 = DE \cos\alpha.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{\triangle A_1BF}{\triangle ABF} = \cos\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\triangle BD_1F}{\triangle BDF} = \cos\alpha,$$

откуда получаем:
$$\triangle A_1BF = \triangle ABF \cdot \cos\alpha$$
$$\triangle BD_1F = \triangle BDF \cdot \cos\alpha$$

Взяв эти два последние уравнения и вычтя из первого уравнения второе, получаем:

$$\triangle A_1BF - \triangle BD_1F = (\triangle ABF - \triangle BDF)\cos\alpha,$$

но
$$\triangle A_1BF - \triangle BD_1F = \triangle A_1BD_1$$

и
$$\triangle ABF - \triangle BDF = \triangle ABD,$$

как это ясно из рис. 182.

Приняв это во внимание, получаем:

$$\triangle A_1BD_1 = \triangle ABD \cdot \cos\alpha.$$

Если мы будем перемещать плоскость $N$ по направлению $AA_1$, перпендикулярному к этой плоскости, то при таком перемещении, очевидно, точки $A_1$, $B$ и $D_1$ постоянно будут находиться на перпендикулярах, опущенных из точек $A$, $B$ и $D$ на перемещающуюся плоскость, причем треугольник $A_1BD_1$ останется неизменным.

В виду этого, мы можем сказать, что величина площади ортогональной проекции данного треугольника будет равна величине его площади, умноженной на косинус двугранного угла между плоскостью данного треугольника и плоскостью его ортогональной проекции.

Из вершины $o$ сфеноида $oa_1a_2a_3$ (рис. 183) восставляем к трем его боковым граням $oa_2a_3$, $oa_1a_3$, $oa_1a_2$ нормали $ob_1$, $ob_2$, $ob_3$, расположенные по отношению к каждой грани с той же стороны, где находится вершина сфеноида, противолежащая данной грани. Откладываем на каждой такой нормали длину, равную числовому выражению площади треугольника перпендикулярной к ней грани сфеноида. Сделав такое построение, мы увидим, что диагональ параллелепипеда, построенного на ребрах $ob_1$, $ob_2$ и $ob_3$, будет перпендикулярна к плоскости $a_1a_2a_3$ и равна по величине площади треугольника $a_1a_2a_3$.

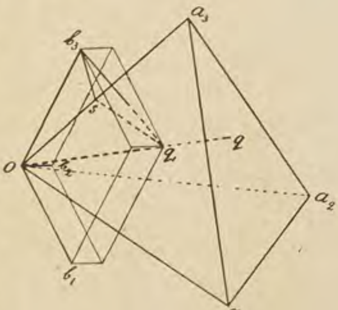


Рис. 183.

По построению мы имеем: $ob_1 = \triangle oa_2a_3$, $ob_2 = \triangle oa_1a_3$ и $ob_3 = \triangle oa_1a_2$.

Так как $ob_1$, $ob_2$, $ob_3$ перпендикулярны к плоскостям $oa_2a_3$, $oa_1a_3$, $oa_1a_2$, то и обратно, $oa_1$, $oa_2$, $oa_3$ будут также перпендикулярны к плоскостям $ob_2b_3$, $ob_1b_3$ и $ob_1b_2$.

Опустим из точки $o$ на основание сфеноида $a_1a_2a_3$ — перпендикуляр $oq$ и проведем через точку $b_3$ плоскость $sb_3q_1$,

параллельную плоскости $ob_1b_2$ и, следовательно, перпендикулярную к ребру $oa_3$. Плоскость $sb_3q_1$ пересечет ребро $oa_3$ в точке $s$, а нормаль $oq$ — в точке $q_1$. Проектируем треугольники $oa_1a_2$ и $a_1a_2a_3$ на плоскость $sb_3q_1$.

Так как эти треугольники имеют общую сторону $a_1a_2$, а вершины $o$ и $a_3$ будут проектироваться на плоскости $sb_3q_1$ в одной и той же точке $s$, то проекции этих двух треугольников на плоскости $sb_3q_1$ совпадут друг с другом и будут представлять собою треугольник $sb_3q_1$.

Как мы видели, площадь проекции треугольника $oa_1a_2$ будет равна площади этого треугольника, умноженной на косинус двугранного угла между плоскостями $oa_1a_2$ и $sb_3q_1$. Заменив плоскости $oa_1a_2$ и $sb_3q_1$ их нормалями $ob_3$ и $oa_3$, получаем:

$$\triangle\, oa_1a_2 \cdot \cos \angle\, (ob_3 : oa_3) = \triangle\, oa_1a_2 \cdot \frac{os}{ob_3} = os.$$

Площадь проекции второго треугольника будет выражаться:

$$\triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \cos \angle\, (oq_1 : oa_3) = \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \frac{os}{oq_1} \cdot$$

Из этих выражений, в виду равенства проекций, получаем:

$$os = \triangle\, a_1a_2a_3 \cdot \frac{os}{oq_1},$$

откуда находим: $$oq_1 = \triangle\, a_1a_2a_3.$$

Проведем через точку $b_2$ плоскость, параллельную $ob_1b_3$. Легко доказать аналогичным рассуждением, что эта плоскость пересечет $oq$ опять в точке $q_1$, находящейся от точки $o$ на расстоянии, в точности равном величине площади треугольника $a_1a_2a_3$.

То же самое получится, если провести через точку $b_1$ плоскость, параллельную $ob_2b_3$. Эти три плоскости вместе с параллельными им плоскостями $ob_1b_2$, $ob_1b_3$ и $ob_2b_3$ образуют параллелепипед, у которого $ob_1$, $ob_2$, $ob_3$ будут ребрами, а $oq_1$ диагональю.

Эта диагональ, как мы уже видели, будет перпендикулярна к плоскости треугольника $a_1a_2a_3$.

Из самого хода рассуждений мы можем вывести следующее заключение.

Если длины ребер $ob_1$, $ob_2$, $ob_3$ будут пропорциональны величинам площадей, перпендикулярных к ним граней в отношении $1:n$, то длина диагонали $oq_1$ будет находиться в таком же отношении $1:n$ к площади $a_1a_2a_3$ и в то же время будет перпендикулярна к плоскости $a_1 a_2 a_3$.

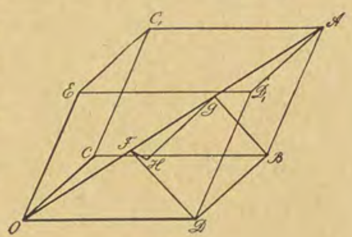


Рис. 184.

Положим, нам дан некоторый параллелепипед $OCBDEA$ (рис. 184).

Обозначим:

$$OC = C_1E = AD_1 = BD = a_1$$
$$OD = CB = AC_1 = ED_1 = a_2$$
$$OE = CC_1 = AB = DD_1 = a_3$$

Диагональ параллелепипеда: $OA = a$.

Диагонали граней $AC = b_1$

$AD = b_2$

$OB = b_3$

Углы: $a_1 : a_2 = x_1x_2$; $a : a_1 = \varrho$

$a_1 : a_3 = x_1x_3$; $a : a_2 = \varphi$

$a_2 : a_3 = x_2x_3$; $a : a_3 = \psi$

Из треугольников $OAC$ и $ABC$ имеем:

$$b_1^2 = a^2 + a_1^2 - 2\,aa_1 \cdot \cos\varrho$$
$$b_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2\,a_2a_3 \cdot \cos(180^0 - x_2x_3),$$

откуда получаем:

$$\cos\varrho = \frac{a^2 + a_1^2 - (a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_2a_3 \cdot \cos x_2x_3)}{2\,aa_1} \qquad (1)$$

Из треугольников $OAD$ и $ABD$ имеем:

$$b_2^2 = a^2 + a_2^2 - 2\,aa_2 \cdot \cos\varphi$$
$$b_2^2 = a_1^2 + a_3^2 - 2\,a_1a_3 \cdot \cos(180^0 - x_1x_3),$$

откуда получаем:

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + a_2^2 - (a_1^2 + a_3^2 + 2\,a_1\,a_3 \cdot \cos x_1\,x_3)}{2\,a\,a_2} \qquad (2)$$

Из треугольников $OAB$ и $OBD$ имеем:

$$b_3^2 = a^2 + a_3^2 - 2\,a\,a_3 \cdot \cos\psi$$
$$b_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2\,a_1\,a_2 \cdot \cos(180^0 - x_1\,x_2),$$

откуда получаем:

$$\cos\psi = \frac{a^2 + a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1\,a_2 \cdot \cos x_1\,x_2)}{2\,a\,a_3} \qquad (3)$$

Через вершины $B$ и $D$ параллелепипеда $OCDBAE$ проведем две плоскости, перпендикулярные к диагонали $OA$.

Положим, эти плоскости пересекут диагональ $OA$ в точках $F$ и $G$. Из точки $G$ проведем $GH$ $BD$ до пересечения в точке $H$ с плоскостью, проходящей через точку $D$ и перпендикулярной к $OA$. Ясно, что при таком построении $GH = BD = OC = a_1$.

Сделав такие построения, проведем прямые $FD$, $FH$ и $BG$. Заметив, что $\angle HGO = \angle COG = \varrho$, так как $OC \parallel GH$ и эти углы будут накрест лежащими, находим из прямоугольных треугольников $OFD$, $AGB$ и $GFH$:

$$OF = a_2 \cos\varphi$$
$$AG = a_3 \cos\psi$$
$$FG = a_1 \cos\varrho.$$

Сложив почленно эти три уравнения, и приняв во внимание, что $OA = OF + FG + AG$, получаем:

$$a = a_1 \cos\varrho + a_2 \cos\varphi + a_3 \cos\psi. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (4) вместо $\cos\varrho$, $\cos\varphi$ и $\cos\psi$, величины этих углов, согласно уравнениям (1), (2) и (3), получаем:

$$a = \frac{a_1[a^2 + a_1^2 - (a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_2\,a_3\,\cos x_2\,x_3)]}{2\,a\,a_1} +$$
$$+ \frac{a_2[a_2 + a_2^2 - (a_1^2 + a_3^2 + 2\,a_1\,a_3\,\cos x_1\,x_3)]}{2\,a\,a_2} +$$
$$+ \frac{a_3[a^2 + a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1\,a_2\,\cos x_1\,x_2)]}{2\,a\,a_3},$$

откуда находим:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\,a_1 a_2 \cos x_1 x_2 + \\ \quad + 2\,a_1 a_3 \cos x_1 x_3 + 2\,a_2 a_3 \cos x_2 x_3 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Таким образом, мы видим, что квадрат диагонали параллелепипеда будет равен сумме квадратов трех его непараллельных ребер плюс удвоенные произведения из трех этих ребер, по два взятых, на косинусы углов между этими ребрами.

Примем $OCDBAE$ за некоторый параллелепипед полярной пространственной решетки, построенный на ребрах

$$OC = p_1 \cdot Ox_1,\ OD = p_2 \cdot Ox_2 \text{ и } OE = p_3 \cdot Ox_3.$$

Так как
$$Ox_1 = \{c_1\} = s_{(100)},$$
$$Ox_2 = \{c_2\} = s_{(010)},$$
$$Ox_3 = \{c_3\} = s_{(001)},$$

то, следовательно, мы можем написать:

$$OC = p_1 \cdot s_{(100)},$$
$$OD = p_2 \cdot s_{(010)},$$
$$OE = p_3 \cdot s_{(001)}.$$

Приняв такие обозначения, мы, на основании только что доказанной теоремы, находим:

$$(OA)^2 = p_1^2 \cdot s_{(100)}^2 + p_2^2 \cdot s_{(010)}^2 + p_3^2 \cdot s_{(001)}^2 + 2 p_1 s_{(100)} p_2 s_{(010)} \cos x_1 x_2 +$$
$$+ 2\,p_1\, s_{(100)} p_3\, s_{(001)} \cos x_1 x_3 + 2\,p_2\, s_{(010)} p_3\, s_{(001)} \cos x_2 x_3.$$

Так как
$$\{x_1 x_2\} = 180^0 - X_3,$$
$$\{x_1 x_3\} = 180^0 - X_2,$$
$$\{x_2 x_3\} = 180^0 - X_1, \quad \text{то}$$

$$(OA)^2 = p_1^2 s_{(100)}^2 + p_2^2 s_{(010)}^2 + p_3^2 s_{(001)}^2 - 2\,p_1\, s_{(100)} p_2 s_{(010)} \cos X_3 -$$
$$- 2\,p_1 s_{(100)} p_3 s_{(001)} \cos X_2 - 2\,p_2 s_{(010)} p_3 s_{(001)} \cos X_1.$$

Сравнив это выражение с уравнением (9) § 8, заключаем, что

$$OA = s_{(p_1 p_2 p_3)}$$

Из этих рассуждений мы выводим следующее весьма важное положение:

Если на трех рядах полярной пространственной решетки, принятых за оси координат, отложить от начала осей отрезки, равные:

$$p_1\ \{c_1\}\ \text{по оси}\ Ox_1,$$
$$p_2\ \{c_2\}\ \text{по оси}\ Ox_2,$$
$$p_3\ \{c_3\}\ \text{по оси}\ Ox_3\ \text{и}$$

на таких отрезках построить параллелепипед, то диагональ такого параллелепипеда будет перпендикулярна плоской сетке $(p_1p_2p_3)$ и по длине равна площади элементарного параллелограмма этой сетки.

Таким образом, индексы символа какого-нибудь ребра полярной решетки $\{[r_1r_2r_3]\}$ будут равны индексам символа $(p_1p_2p_3)$ грани первоначальной решетки, перпендикулярной к ребру $\{[r_1r_2r_3]\}$ полярной решетки.

## 11. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ВОЗМОЖНЫМИ РЕБРАМИ КОМПЛЕКСА.

Посмотрим теперь, как мы можем определить угол между двумя возможными ребрами кристаллического комплекса, если известны символы этих ребер $[r_1r_2r_3]$ и $[r_1'r_2'r_3']$.

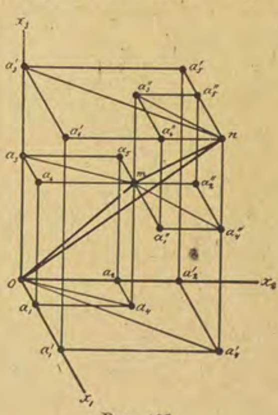


Рис. 185.

Положим (рис. 185), $om = r$ — длина промежутка ряда пространственной решетки, соответствующего направлению ребра $[r_1r_2r_3]$ и $on = r'$ — длина промежутка ряда, соответствующего ребру $[r_1'r_2'r_3']$.

Пусть $ox_1$, $ox_2$ и $ox_3$ — три ряда пространственной решетки, принятые за кристаллографические оси, с промежутками: по $ox_1$ — $c_1$; по $ox_2$ — $c_2$ и по $ox_3$ — $c_3$.

Положим: $\angle(ox_1 : ox_2) = x_1x_2$; $\angle(ox_1 : ox_3) = x_1x_3$ и $\angle(ox_2 : ox_3) = x_2x_3$.

Обозначим, кроме того, двугранный угол с ребром $ox_1$ через $X_1$, с ребром $ox_2$ через $X_2$ и с ребром $ox_3$ через $X_3$.

Приняв $ox_1$, $ox_2$ и $ox_3$ за ребра, а $om$ и $on$ за диагонали, построим два параллелепипеда $oa_1a_4a_2a_5ma_6a_3$ и $oa'_1a'_4a'_2a'_5na'_6a'_3$.

В этих параллелепипедах мы имеем:

$$a_3a_6 = a_5m = a_2a_4 = oa_1 = r_1c_1,$$
$$a_3a_5 = a_6m = a_1a_4 = oa_2 = r_2c_2,$$
$$a_2a_5 = a_4m = a_1a_6 = oa_3 = r_3c_3$$

и

$$a'_3a'_6 = a'_5n = a'_2a'_4 = oa'_1 = r'_1c_1,$$
$$a'_3a'_5 = a'_6n = a'_1a'_4 = oa'_2 = r'_2c_2,$$
$$a'_2a'_5 = a'_4n = a'_1a'_6 = oa'_3 = r'_3c_3.$$

На основании приведенного выше выражения диагонали параллелепипеда через длины его ребер, мы имеем:

$$r^2 = r_1^2c_1^2 + r_2^2c_2^2 + r_3^2c_3^2 + 2\,r_1r_2c_1c_2\cos x_1x_2 + \\ + 2\,r_1r_3c_1c_3\cos x_1x_3 + 2\,r_2r_3c_2c_3\cos x_2x_3$$

и

$$(r')^2 = (r'_1c_1)^2 + (r'_2c_2)^2 + (r'_3c_3)^2 + 2\,r'_1r'_2c_1c_2\cos x_1x_2 + \\ + 2\,r'_1r'_3c_1c_3\cos x_1x_3 + 2\,r'_2r'_3c_2c_3\cos x_2x_3.$$

Соединим точки $m$ и $n$ прямой $mn$. Так как, по построению, $m$ и $n$ — гомологические точки пространственной решетки, то направление $mn$ должно быть непременно возможным ребром данной пространственной решетки.

Перенесем теперь кристаллографические оси параллельно самим себе до совмещения начала осей с точкой $m$.

После такого переноса получаем $ma''_1$, $ma''_2$ и $ma''_3$ — некоторые отрезки на новых кристаллографических осях, параллельных ранее принятым. Построим на этих осях параллелепипед $ma''_1a''_4a''_2a''_5a''_3a''_6$. В этом параллелепипеде грани $a''_3a''_5na''_6$ и $na''_6a''_4a''_1$ будут совпадать соответственно с гранями $a'_3a'_5na'_6$ и $a'_1a'_6na'_4$ параллелепипеда $oa'_1a'_4a'_2a'_5na'_6a'_3$.

Заметим, что $a_5a''_1 = oa'_1 = r'_1$ и $a_5m = oa_1 = r'_1$.

В виду этого, мы имеем:

$$ma''_1 = a_5a'_1 - a_5m = r'_1 - r_1.$$

Точно также получаем:

$$ma_2'' = oa_2' - oa_2 = r_2' - r_2$$

$$\text{и } ma_3'' = oa_3' - oa_3 = r_3' - r_3.$$

Выражая длину диагонали параллелепипеда $ma_1''a_4''a_2''a_5''a_6''$ через его ребра и плоские углы, получаем:

$$(mn)^2 = (ma_1'')^2 + (ma_2'')^2 + (ma_3'')^2 + 2\,ma_1'' \cdot ma_2'' \cdot \cos x_1 x_2 + 2\,ma_1'' \cdot ma_3'' \cdot \cos x_1 x_3 + 2\,ma_2'' \cdot ma_3'' \cdot \cos x_2 x_3.$$

Заменив $ma_1''$, $ma_2''$ и $ma_3''$ их только что выведенными значениями, находим:

$$\begin{aligned}(mn)^2 = {} & (r_1' - r_1)^2 c_1^2 + (r_2' - r_2)^2 c_2^2 + (r_3' - r_3)^2 c_3^2 + \\ & + 2\,(r_1' - r_1)(r_2' - r_2)\,c_1 c_2 \cdot \cos x_1 x_2 + \\ & + 2\,(r_1' - r_1)(r_3' - r_3)\,c_1 c_3 \cdot \cos x_1 x_3 + \\ & + 2\,(r_2' - r_2)(r_3' - r_3)\,c_2 c_3 \cdot \cos x_2 x_3.\end{aligned}$$

Теперь нам известны три стороны треугольника $omn$. В виду этого, мы легко можем определить тригонометрические величины углов этого треугольника и в частности cos угла при вершине $o$, а именно:

$$\cos \angle\,(mon) = \cos\,(r : r') = \frac{(om)^2 + (on)^2 - (mn)^2}{2\,om \cdot on}.$$

Вставив в это выражение вместо $om$, $on$ и $mn$ найденные их значения, получаем:

$$\cos\,(r : r') = \frac{\left.\begin{array}{r} r_1 r_1' c_1^2 \\ + r_2 r_2' c_2^2 \\ + r_3 r_3' c_3^2 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r} (r_1 r_2' + r_1' r_2)\,c_1 c_2 \cdot \cos x_1 x_2 + \\ + (r_1 r_3' + r_1' r_3)\,c_1 c_3 \cdot \cos x_1 x_3 + \\ + (r_2 r_3' + r_2' r_3)\,c_2 c_3 \cdot \cos x_2 x_3 \end{array}\right.}{\sqrt{\left.\begin{array}{r} r_1^2 c_1^2 \\ + r_2^2 c_2^2 \\ + r_3^2 c_3^2 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r} 2\,r_1 r_2\,c_1 c_2 \cdot \cos x_1 x_2 \\ + 2\,r_1 r_2\,c_1 c_3 \cdot \cos x_1 x_3 \\ + 2\,r_2 r_3\,c_2 c_3 \cdot \cos x_2 x_3 \end{array}\right\}} \times \sqrt{\left.\begin{array}{r} (r_1' c_1)^2 \\ + (r_2' c_2)^2 \\ + (r_3' c_3)^2 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r} 2\,r_1' r_2' c_1 c_2 \cdot \cos x_1 x_2 \\ + 2\,r_1' r_3' c_1 c_3 \cdot \cos x_1 x_3 \\ + 2\,r_2' r_3' c_2 c_3 \cdot \cos x_2 x_3 \end{array}\right\}}}.$$

## 12. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ РЕБРАМИ В КУБИЧЕСКИ-ИЗОТРОПНОМ КОМПЛЕКСЕ.

Взяв общее выражение для косинуса угла между двумя ребрами $r$ символа $[r_1 r_2 r_3]$ и $r'$ символа $[r'_1 r'_2 r'_3]$, кристаллического комплекса и приняв во внимание, что для кубически-изотропного комплекса мы имеем: $x_1 x_2 = x_1 x_3 = x_2 x_3 = 90^0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, получаем:

$$\cos(r:r') = \frac{r_1 r'_1 + r_2 r'_2 + r_3 r'_3}{\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(r'^2_1 + r'^2_2 + r'^2_3)}}$$

Принимая во внимание, что $\sin(r:r') = \sqrt{1 - \cos^2(r:r')}$ и $\operatorname{tg}(r:r') = \frac{\sqrt{1-\cos^2(r:r')}}{\cos(r:r')}$, находим:

$$\sin(r:r') = k\sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(r'^2_1 + r'^2_2 + r'^2_3)}}$$

$$\operatorname{tg}(r:r') = \frac{k\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{r_1 r'_1 + r_2 r'_2 + r_3 r'_3}$$

где

$$kp_1 = r_2 r'_3 - r_3 r'_2$$

$$kp_2 = r_3 r'_1 - r_1 r'_3$$

$$kp_3 = r_1 r'_2 - r_2 r'_1.$$

Так как символ грани и ребра, к ней перпендикулярного, для кубически-изотропного комплекса равнозначны, то мы можем рассматривать полученные нами выражения, как значения угловых величин между перпендикулярами к граням данных символов. Таким образом, для нахождения угла между перпендикулярами к граням $(p_1 p_2 p_3)$ и $(p'_1 p'_2 p'_3)$ мы можем составить следующие выражения:

$$\cos(p:p') = \frac{p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)}}$$

$$\sin(p:p') = k\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)}}$$

$$\operatorname{tg}(p:p') = \frac{k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3}$$

где
$$
\begin{aligned}
kr_1 &= p_2 p_3' - p_3 p_2',\\
kr_2 &= p_3 p_1' - p_1 p_3',\\
kr_3 &= p_1 p_2' - p_2 p_1',
\end{aligned}
$$
а $p$ и $p'$ — перпендикуляры к граням $(p_1 p_2 p_3)$ и $(p_1' p_2' p_3')$.

## 13. УГЛЫ МЕЖДУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАМИ К ВОЗМОЖНЫМ ГРАНЯМ КОМПЛЕКСА.

Как мы знаем, в полярной пространственной решетке:
$$
\begin{aligned}
\{c_1\} &= s_{(100)} = c_2 c_3 \sin x_2 x_3\\
\{c_2\} &= s_{(010)} = c_1 c_3 \sin x_1 x_3\\
\{c_3\} &= s_{(001)} = c_1 c_2 \sin x_1 x_2\\
\{r\} &= p\\
\{x_2 x_3\} &= 180^0 - X_1\\
\{x_1 x_3\} &= 180^0 - X_2\\
\{x_1 x_2\} &= 180^0 - X_3
\end{aligned}
$$

Рассматривая выражение $\cos (r : r')$, как величину cos угла между двумя ребрами в полярной пространственной решетке, мы можем заменить величины, взятые в полярной решетке, величинами, равными им в первоначальной решетке.

Сделав такое изменение, получим выражение для cos угла между перпендикулярами $p$ и $p'$ к двум граням кристаллического комплекса, а именно:

$$
\cos (p : p') =
$$
$$
= \frac{\left.\begin{array}{r} p_1 p_1' c_2^2 c_3^2 \sin^2 x_2 x_3 \\ + p_2 p_2' c_1^2 c_3^2 \sin^2 x_1 x_3 \\ + p_3 p_3' c_1^2 c_2^2 \sin^2 x_1 x_2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{r} (p_1 p_2' + p_1' p_2) c_1 c_2 c_3^2 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_3 \cos X_1 \\ + (p_1 p_3' + p_1' p_3) c_1' c_2^2 c_3 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_2 \cos X_2 \\ + (p_2 p_3' + p_2' p_3) c_1^2 c_2 c_3 \sin x_1 x_3 \sin x_1 x_2 \cos X_3 \end{array}\right.}{\sqrt{\left.\begin{array}{r} p_1^2 c_2^2 c_3^2 \sin^2 x_2 x_3 \\ + p_2^2 c_1^2 c_3^2 \sin^2 x_1 x_3 \\ + p_3^2 c_1^2 c_2^2 \sin^2 x_1 x_2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{r} 2 p_1 p_2 c_1 c_2 c_3^2 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_3 \cos X_1 \\ + 2 p_1 p_3 c_1 c_2^2 c_3 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_2 \cos X_2 \\ + 2 p_2 p_3 c_1^2 c_2 c_3 \sin x_1 x_2 \sin x_1 x_3 \cos X_3 \end{array}\right\}} \times}
$$
$$
\times \sqrt{\left.\begin{array}{r} (p'_1 c_2 c_3)^2 \sin^2 x_2 x_3 \\ + (p'_2 c_1 c_3)^2 \sin^2 x_1 x_3 \\ + (p'_3 c_1 c_2)^2 \sin^2 x_1 x_2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{r} 2 p_1' p_2' c_1 c_2 c_3^2 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_3 \cos X_1 \\ + 2 p_1' p_3' c_1 c_2^2 c_3 \sin x_2 x_3 \sin x_1 x_2 \cos X_2 \\ + 2 p_2' p_3' c_1^2 c_2 c_3 \sin x_1 x_2 \sin x_1 x_3 \cos X_3 \end{array}\right.}
$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

## V. СИМВОЛЫ ЭЛЕМЕНТОВ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА.



## VI. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТОК.